ಪದವಿಪೂರ್ವ ದ್ವಿತೀಯ ವರ್ಷದ ಪಠ್ಯ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು

ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್



ಪ್ರಸಾರಾಂಗ

ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ

ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ ೫೮೩ ೨೭೬

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು
ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್



ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ
ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ

GANITASHASTRA Second Year P.U.C. Mathematics text book, edited by Dr. S. Balachandra Rao, Published by Prof. A.V. Navada, Director, Prasaranga, Kannada University, Hampi, Vidyaranya, Kamalapura - 583 221, Pages : 14 + 646, First impression 1997

ಯೋಜನಾ ನಿರ್ವಹಣೆ
ಸಂಕಲನ ವಿಭಾಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ

ಪ್ರಕಾಶಕರು
ಪ್ರೊ. ಎ.ವಿ. ನಾವಡ
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ
ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ, ಕಮಲಾಪುರ - ೫೮೩ ೨೨೧

ಬೆಲೆ: 120/-

ಡಿ.ಟಿ.ಪಿ. ಸಂಯೋಜನೆ
ರೆಡಿ ಪ್ರಿಂಟ್ಸ್
ಮೈಸೂರು

ಮುದ್ರಕರು
ಸತ್ಯಶ್ರೀ ಪ್ರಿಂಟರ್ಸ್ ಪ್ರೈ. ಲಿ.
ಚಾಮರಾಜಪೇಟೆ, ಬೆಂಗಳೂರು - ೫೬೦ ೦೧೮

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಮಿತಿ

ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು
ಡಾ॥ ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ., ಪಿಎಚ್.ಡಿ.
ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು ಹಾಗೂ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರು
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬಸವನಗುಡಿ, ಬೆಂಗಳೂರು - ೫೬೦ ೦೦೪

ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಯ ಸದಸ್ಯರು
ಡಾ॥ ಪಿ.ಎಸ್. ಬಾಗೇವಾಡಿ, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ., ಪಿಎಚ್.ಡಿ.
ಅಧ್ಯಕ್ಷರು ಮತ್ತು ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ಕುವೆಂಪು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಬಿ.ಆರ್. ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ - ೫೭೭ ೧೧೫

ಡಾ॥ ಇ. ಸಂಪತ್ಕುಮಾರ್, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ, ಪಿಎಚ್.ಡಿ.
ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಮಾನಸ ಗಂಗೋತ್ರಿ
ಮೈಸೂರು - ೫೭೦ ೦೦೬

ಲೇಖಕರು
ಶ್ರೀಮತಿ ಟಿ.ಪಿ. ಶಾಂತಾಬಾಯಿ, ಎಂ.ಎ. ಬಿ.ಎಡ್.
ನಿವೃತ್ತ ಡಿ.ಪಿ.ಐ., ಕರ್ನಾಟಕ ಸರಕಾರ, ಬೆಂಗಳೂರು

ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಂತಿ ಪುರಂದರ್, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ
ರೀಡರ್, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ಜ್ಯೋತಿನಿವಾಸ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬೆಂಗಳೂರು

ಶ್ರೀಮತಿ ಪದ್ಮಜಾ ವೇಣುಗೋಪಾಲ್, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ
ಸಂಶೋಧನ ಸಹಾಯಕರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬಸವನಗುಡಿ, ಬೆಂಗಳೂರು - ೪

ಶ್ರೀಮತಿ ಟಿ.ಆರ್. ಚಂದ್ರಕಲಾ, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ಎಂ.ಎಲ್.ಎ. ಪದವಿಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು
ಮಲ್ಲೇಶ್ವರಂ ೧೪ನೇ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು - ೩

ನಿವೇದನೆ

ಇಂದಿನ ಯುಗ ವಿಜ್ಞಾನದ ಯುಗ. ವಿಜ್ಞಾನ ನಮಗೆಲ್ಲ ಉಪಕಾರಕವೇನೋ ಹೌದು. ಅದರಂತೆ ಒಂದು ಆಹ್ವಾನವೂ ಹೌದು. ನಮಗರಿವಾಗದಂತೆ ವಿಜ್ಞಾನ ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯದ ಬದುಕಿನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಕೊಂಡುಬಿಟ್ಟಿದೆ; ಆದರೂ ನಮಗಿನ್ನೂ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ದೃಷ್ಟಿಕೋನ ಬಂದಿಲ್ಲ. ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ನಾಗರಿಕತೆಯ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿರುವ ವಿಜ್ಞಾನ ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯದ ಜೀವನವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ ನಮ್ಮಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಮಾರ್ಪಾಡುಗಳನ್ನು ಇಂದು ದಾಖಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದರ ಜೊತೆಗೇ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಾವು ಯಾವ ವಿವೇಕದಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದರ ತಿಳಿವು ಕೂಡ ನಮ್ಮಲ್ಲಿ ಮೂಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ನಾವಿಂದು ವಿಜ್ಞಾನ, ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಆಧುನಿಕ ತಂತ್ರವಿಜ್ಞಾನ ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯ ಮೂಲಕ ಕಲಿಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಸಾಹಿತ್ಯ, ಕಲೆ, ತತ್ವಜ್ಞಾನ, ರಾಜಕೀಯ, ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್‌ನ ಜೊತೆಗೆ ಕನ್ನಡವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಕಲಿಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ, ಬೇರೆ ಭಾಷೆಯ ಮಾಧ್ಯಮದಿಂದ ಕೇವಲ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯಷ್ಟೇ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ; ತಿಳಿವಳಿಕೆಯ ವಿಧಾನಗಳೂ ಬಂದು ಬಿಡುತ್ತವೆ. ಕನ್ನಡ ತನ್ನ ಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಕಲಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ; ಆಗಲೇ ತಿಳಿವಳಿಕೆ ನಮ್ಮದಾಗುವುದು. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರದಂಥ ಶುದ್ಧ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಪರಂಪರೆ ಪ್ಲೇಟೋ, ಅರಿಸ್ಟಾಟಲರಿಂದ ಬಂದರೆ ಅದು ನಮ್ಮದಾಗುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಅದ್ಭುತ ದೇವಾಲಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದ ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವಜರ ತಂತ್ರವಿಜ್ಞಾನ ಯಾವುದಿತ್ತು ಎಂದು ಯೋಚಿಸಲು ಕೂಡ ನಾವು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿಲ್ಲ. ಸುಯೇಜ ಕಾಲುವೆಯ ಮೂಲಕ ಹರಿದು ಬಂದ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯ ಪ್ರವಾಹದಿಂದ ನಮ್ಮ ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿಯ ತಿಳುವಳಿಕೆಯ ಕೃಷಿ ಸಾಗಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯರಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸಾಹಿತ್ಯ ವಿಪುಲವಾಗಿ ಬೆಳೆದುಬಂದಿದೆ. ಅಂಥ ಸಾಹಿತ್ಯ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರಬೇಕು. ತಿಳಿವಳಿಕೆ ಎಷ್ಟೇ ಶ್ರೇಷ್ಠವಾಗಿರಲಿ, ಅಗತ್ಯವಾದದ್ದೇ ಆಗಿರಲಿ, ನಮ್ಮ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಅದು ಮೂಡಿ ಬರದಿದ್ದರೆ, ಅದು ನಮ್ಮ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯಾಗಲಾರದು. ಕರ್ನಾಟಕದಲ್ಲಿ ಮೌಲಿಕವಾದ ವಿಜ್ಞಾನ ಹುಟ್ಟಿ ಬರಬೇಕಾದರೆ ನಮ್ಮ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸಾಹಿತ್ಯ ಹುಟ್ಟಿ ಬರಬೇಕು. ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಚಿಂತನೆ ನಡೆಯಬೇಕು. ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ ಅಂಥ ತೇಜಸ್ಸು, ಶಕ್ತಿ ಇದೆ. ವಚನಕಾರರ ಭಾಷೆ ಅಣುವಿಜ್ಞಾನದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಸಮರ್ಥವಾಗಿದೆ.

ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಹೇಳುವ ಸಲುವಾಗಿಯೇ ಇಂದು ಪ್ರಮಾಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಷೆಯೊಂದನ್ನು ಕನ್ನಡದ ಈ ಅಂತಸ್ಥ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಸೃಷ್ಟಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಂತಹ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಬಳಕೆಗೆ ತರುವುದು ಇಂದು ತೀರಾ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇಂತಹುದೊಂದು ಅಗತ್ಯವನ್ನು ಪೂರೈಸುವಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತಿದೆ. ವಿಷಯ ತಜ್ಞರೂ, ಭಾಷಾತಜ್ಞರೂ ಕೂಡಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಈ ಯೋಜನೆಯ ಮೊದಲ ಹಂತದ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೂಡ ಇವುಗಳಿಂದ ನೆರವು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿಯೂ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥಕೋಶ ಕೂಡ ಇದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಟ್ಟ ಸಂಪಾದಕರಿಗೆ, ಲೇಖಕರಿಗೆ ನಾನು ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪರವಾಗಿ ಕೃತಜ್ಞನಾಗಿದ್ದೇನೆ.

ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಕಂಬಾರ
ಕುಲಪತಿಗಳು

ಯೋಜನೆ ಕುರಿತು

ನಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮ ಕನ್ನಡವೇ ಆಗಬೇಕು ಎಂಬ ಶಿಕ್ಷಣತಜ್ಞರ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಯಾರೂ ವಿರೋಧಿಸಲಾರರು. ಆದರೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ಭರಾಟೆಯಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಎಲ್ಲಿಗೂ ಸಾಲದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅಲ್ಲಗಳೆಯಲಾಗದು. ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಂತೂ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ತೀವ್ರತರವಾಗಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಹೇಳುವ ಸಲುವಾಗಿಯೇ ಪ್ರಮಾಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಷೆಯೊಂದನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಬಳಕೆಗೆ ತರುವುದು ತೀರಾ ಅಗತ್ಯ. ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಪಾತ್ರವೇನು ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುವುದು ಒಬ್ಬಿಬ್ಬರಿಂದ ಆಗುವ ಮಾತಲ್ಲ.

ಕನ್ನಡದ ಸರ್ವತೋಮುಖ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ತನ್ನ ಮುಖ್ಯ ಗುರಿಯಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ಶ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ಸಂಸ್ಥೆ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ. ಶಿಕ್ಷಣ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಈ ಅಗತ್ಯದ ಹೊಣೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸುವ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಅದು ರೂಪಿಸುತ್ತಿದೆ. ಪ್ರಸ್ತುತ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳಿಗಾಗಿ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿದೆ. ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳನ್ನೇ ಮೊದಲಿಗೆ ಪರಿಗಣಿಸಲು ಮುಖ್ಯ ಕಾರಣಗಳಿವೆ. ನಗರ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲು ನೋಟಕ್ಕಾದರೂ ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮಕ್ಕೇ ಶರಣಾಗಿದ್ದಾರೆ ಎನಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲೂ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವಿವರಣೆ ದೊರೆಯಲಾರದೇ ಎಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವವರಿದ್ದಾರೆ. ನಮ್ಮ ಗ್ರಾಮಾಂತರ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಂತೂ, ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯವರೆಗೂ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲೇ ಶಿಕ್ಷಣ. ನಂತರದ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮವೇ ಉಪಯೋಗಕರ ಎಂಬ ಅಸಂಗತ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಈ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅಗತ್ಯದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆ ಬೇರೆ. ಅಂದರೆ, ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವವರಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ ಅಲ್ಲದೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಕಾತುರರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಮೊದಲ ಹೆಜ್ಜೆಯಾಗಿ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡಿದೆ. ಈ ಬೃಹತ್ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ನುರಿತ ಅಧ್ಯಾಪಕರು, ಶಿಕ್ಷಣ ತಜ್ಞರು, ಭಾಷಾ ತಜ್ಞರು-ಹೀಗೆ ಹಲವರ ಸಲಹೆ, ಸೂಚನೆ, ಸಹಕಾರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿಗೆ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ವಿಶೇಷ ತಜ್ಞರನ್ನು ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರೆಂದು ನೇಮಿಸಲಾಯಿತು. ಇವರು ಅರ್ಹರಾದ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಆಯ್ದು ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರು. ವಿವಿಧ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ನುರಿತ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ನೆರವಿನಿಂದ ಬರೆದು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದರು. ಹೀಗೆ ಸಿದ್ಧಗೊಂಡ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳ ಭಾಷಾ ಪರಿಶೀಲನೆಯನ್ನು ತಜ್ಞರಿಂದ ನಡೆಸಲಾಯಿತು. ಕೊನೆಯದಾದರೂ, ಬಹುಮುಖ್ಯ ಹಂತವೊಂದನ್ನು ಹಮ್ಮಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಅದೆಂದರೆ, ಹೈಸ್ಕೂಲುಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬೋಧಿಸುತ್ತಿದ್ದು, ಅದೇ ಶಾಲೆಗೆ ಸೇರಿದ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮೀಡಿಯಂ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ನೆರವಿನ ಕಾರಣವಾಗಿ, ಕನ್ನಡವನ್ನು ವಿಜ್ಞಾನ ಬೋಧನೆಯ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತಿರುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಸಿದ್ಧಗೊಂಡ ನಮ್ಮ ಕನ್ನಡ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಕೋರಲಾಯಿತು. ಅವರು ಸೂಚಿಸಿದ ಹಲವು ಸಲಹೆ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ತಿದ್ದಿ, ಅಂತಿಮವಾಗಿ ಮುದ್ರಣಕ್ಕೆಂದು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಯಿತು.

ಯೋಜನೆಯ ಆರಂಭದಿಂದಲೂ ಈ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲು ಎಚ್ಚರವನ್ನೂ ಶ್ರಮವನ್ನೂ ವಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಯೋಜನೆಯ ರೂವಾರಿ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಕರಾದ ನಮ್ಮ ಮಾನ್ಯ ಕುಲಪತಿ ಡಾ. ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಕಂಬಾರರು ಯೋಜನೆಯು ಸುಲಲಿತವಾಗಿ ನಡೆಯಲು ಕಾರಣರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ನಿರಂತರ ಒತ್ತಾಸೆಯಿಂದಲೇ ಈ ಯೋಜನೆ ಮುಂದುವರೆದು, ಇದೀಗ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಹಂತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದೆ.

ಇಂತಹ ಬೃಹತ್ ಯೋಜನೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ನೆರವಿಗೆ ನಿಂತಿರುವ ವಿದ್ವಾಂಸರ ಪಟ್ಟಿ ದೊಡ್ಡದು. ಪ್ರತಿ ವಿಭಾಗದ ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು, ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಗಳ ಸದಸ್ಯರು, ಲೇಖಕರು, ಭಾಷಾಪರಿಶೀಲಕರು ಹಾಗೂ ವಿಷಯ ಪರಿಶೀಲಕರನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನೆನೆಯುತ್ತೇನೆ. ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕರನ್ನು, ನನ್ನ ಎಲ್ಲ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳನ್ನು, ಅವರಿಂದ ಪಡೆದ ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ನೆರವಿಗಾಗಿ ವಂದಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಕೊನೆಯದಾಗಿ, ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು ಹಾಗೂ ಬೋಧಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬ ಸಂದೇಹವನ್ನು ನಿವಾರಿಸಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕರಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ಬಗ್ಗೆ ವಿಶ್ವಾಸವನ್ನು ಮೂಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಈ ಮಹತ್ವಾಕಾಂಕ್ಷೆಯ ಯೋಜನೆ ಸಫಲವಾದರೆ ನಮ್ಮ ಶ್ರಮ ಸಾರ್ಥಕ.

ಡಾ. ಎಚ್. ಎಸ್. ಶ್ರೀಮತಿ

ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷ ೧೯೯೫-೯೬ರಿಂದ ಪದವಿಪೂರ್ವ ತರಗತಿಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಜಾರಿಗೆ ಬಂದಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಎರಡನೇ ತರಗತಿಗಾಗಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕರು ಸ್ವಾಗತಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ಆಶಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಆಡುಭಾಷೆಯಾದ ಕನ್ನಡದ ಮೂಲಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬ ದೃಢ ವಿಶ್ವಾಸದಿಂದ ಗಣಿತದ ತತ್ವಗಳನ್ನು, ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು, ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಆದಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂತೆಯೇ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಹಾಗೂ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಾಪಾಡಿಕೊಂಡು ಬರಬೇಕಾದ ಭಾಷಾಗಾಂಭೀರ್ಯಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ನಿಖರತೆಗೆ ವಿಶೇಷ ಗಮನವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಮುಖ್ಯವಾದ ವಿಶೇಷಗಳು:

೧. ಹಿಂದಿನ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿದ್ದ ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಈಗ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸೇರ್ಪಡಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೈ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

೨. ಹೊಸ ವಿಷಯಗಳಾದ (ಅ) ಗಣಿತ ತರ್ಕ, (ಆ) ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ವೃತ್ತಗಳ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ, ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ಸಹವರ್ತಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆ, (ಇ) ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಅವಕಲನಗಳ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಹಾಗೂ (ಈ) ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು - ಇವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ವಿಶೇಷವಾದ ಅಂಶಗಳು :

೧. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲೂ ನಿರೂಪಿಸಲಾದ ಗಣಿತ ತತ್ವಗಳನ್ನು, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವೈವಿಧ್ಯಮಯವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

೨. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಾಯದ - ಹಲವೊಮ್ಮೆ ಉಪ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ - ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಲೆಕ್ಕಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

೩. ಪುಸ್ತಕದ ಆದಿಯಲ್ಲಿ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಂಡಲಿಯ ಅಧಿಕೃತ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಹಾಗೂ ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅಧಿಕೃತ ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

೪. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು **ಕನ್ನಡ–ಇಂಗ್ಲಿಷ್** ಹಾಗೂ **ಇಂಗ್ಲಿಷ್–ಕನ್ನಡ** ಶಬ್ದಗಳ ಪಟ್ಟಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಇನ್ನೂ ಆಳವಾದ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಗ್ರಂಥ ಋಣವನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

೫. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೆರಳಿಸುವಂತಹ ಭಾರತೀಯ ಹಾಗೂ ಪಾಶ್ಚಿಮಾತ್ಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಂದರ್ಭೋಚಿತವಾಗಿ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸೇರ್ಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳಿಗಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಿಂದ ಪ್ರಕಟಿತವಾದ **"ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ"** ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಬಹುದು.

೬. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಸಹಾಯವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಅಂಕದ - ಸಣ್ಣ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡಬೇಕಾಗಿರುವ ಬಹಳಷ್ಟು ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೃತಜ್ಞತೆ : ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಭಾಗಗಳ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ಬಹಳ ಶ್ರದ್ಧೆ ಮತ್ತು ಆಸಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಬರೆದುಕೊಟ್ಟ ನನ್ನ ಸಹಲೇಖಕ ಮಿತ್ರರನ್ನು ಹಾಗೂ ಸೂಕ್ತ ತಿದ್ದುಪಡಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಲಹೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಯ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಕೃತಜ್ಞತಾಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳಲು ಅವಕಾಶ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಟ್ಟ, ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಕುಲಪತಿಗಳಾದ ಡಾ. ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಕಂಬಾರರಿಗೂ, ಸಂಕಲನ ವಿಭಾಗದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರಾದ ಡಾ. ಎಚ್.ಎಸ್. ಶ್ರೀಮತಿಯವರಿಗೂ ಹಾಗೂ ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ಹಿಂದಿನ ನಿರ್ದೇಶಕರಾಗಿದ್ದ ಡಾ. ಕರೀಗೌಡ ಬೀಚನಹಳ್ಳಿಯವರಿಗೆ ಮತ್ತು ಈಗಿನ ನಿರ್ದೇಶಕರಾಗಿರುವ ಡಾ. ಎ.ವಿ. ನಾವಡ ಅವರಿಗೂ ಲೇಖಕರ ಹಾಗೂ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಯ ಪರವಾಗಿ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕವಾದ ವಂದನೆಗಳು.

ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್
ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು

ಪರಿವಿಡಿ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

"ಭಾಸ್ಕರನ ಚಕ್ರವಾಳ ವಿಧಾನವು ಎಲ್ಲಾ ಶ್ಲಾಘನೆಗೂ ಮೀರಿದೆ. ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಲಾಗ್ರಾಂಜ್‌ನಿಗಿಂತ ಮೊದಲು ಗಳಿಸಿದ ಸಾಧನೆಗಳ ಪೈಕಿ ಅತ್ಯಂತ ಶ್ರೇಷ್ಠವಾದುದು."

- ಜರ್ಮನಿಯ ಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞ ಹ್ಯಾಂಕೆಲ್

"ಪ್ರಚಂಡನಾದ ಸೂರ್ಯನು ತನ್ನ ಪ್ರಜ್ವಲಿಸುವ ಬೆಳಕಿನಿಂದ ನಕ್ಷತ್ರಗಳನ್ನು ಮರೆಮಾಚುವಂತೆ ಒಬ್ಬ ಮಹಾಜ್ಞಾನಿಯು ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದರಿಂದ - ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ - ಸಭೆಗಳಲ್ಲಿ ಇತರರ ಖ್ಯಾತಿಯನ್ನು ಕಾಂತಿಹೀನಗೊಳಿಸುತ್ತಾನೆ."

- ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ

ಅಧ್ಯಾಯ - 1

ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ

1.1 ಗಣಗಳು, ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳ ಸಮುದಾಯವನ್ನು ಒಂದು 'ಗಣ'ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪದದ ಬದಲಾಗಿ ಸಮೂಹ, ಶೇಖರಣೆ ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನೂ ಬಳಸುವುದುಂಟು. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಆ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿರಲು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. N ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು

$N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅನಂತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಗಣವನ್ನು **"ಅನಂತಗಣ"**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

ಹತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು A ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಅದನ್ನು ನಾವು

$A = \{ x | x<10 \}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಾವು ಪರಿಮಿತ (ಪರ್ಯಾಪ್ತ) ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

A ಎಂಬ ಗಣದಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಒಂದು ಗಣಾಂಶವಾಗಿದ್ದರೆ,

$x \in A$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ, x ಎಂಬುದು A ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $x \notin A$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಶೂನ್ಯಗಣ: ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳೇ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಗಣವನ್ನು **'ಶೂನ್ಯಗಣ'** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನು $\emptyset$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:

(i) 23ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು 29ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿಯೂ ಇರುವ ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

(ii) ಭಾರತದೇಶದ ಈವರೆಗಿನ ಮಹಿಳಾ ರಾಷ್ಟ್ರಾಧ್ಯಕ್ಷರ ಗಣ

ಉಪಗಣ : A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ, A ಗಣದ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳೂ B ಗಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, A ಗಣವನ್ನು B ಗಣದ ಉಪಗಣವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A \subset B$ ಅಥವಾ $B \supset A$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ, Aಯು Bಯಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದೆ' ಅಥವಾ 'Bಯು Aಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ'ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರತಿಗಣವೂ ತನ್ನದೇ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, A ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ $A \subseteq A$. ಹಾಗೆಯೇ, ಶೂನ್ಯಗಣವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\emptyset \subset A$.

ಉದಾಹರಣೆ : $N = \{1, 2, 3, ...\}$ ಎಂಬುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು,

$O = \{1, 3, 5, ...\}$ ಎಂಬುದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, $O \subset N$ ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ.

ಸಮಗಣಗಳು : A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ A ಯ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳೂ B ಯಲ್ಲಿದ್ದು, B ಯ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳೂ A ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳನ್ನು ಸಮಗಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A = B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $A \subset B$ ಮತ್ತು $B \subset A$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $A = B$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ಹೇಳಿದಂತೆ, ಯಾವುದೇ ಗಣವು ಅದರದೇ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವಿಶ್ವಗಣ : ಒಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಗಣವನ್ನು ವಿಶ್ವಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು U ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ

ಗಣ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು:

(i) **ಸಂಯೋಗ:** ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ಪಡೆದ ಗಣವನ್ನು ದತ್ತಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. A ಮತ್ತು B ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ

$$A \cup B = \{ x | x \in A \text{ or } x \in B \text{ or } x \in A \text{ and } B \}$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) **ಛೇದನ:** ಎರಡೂ ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು ಅವುಗಳ ಛೇದನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ

$$A \cap B = \{ x | x \in A \text{ and } x \in B \}$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಂತರ: A ಮತ್ತು B ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ಗಣದಲ್ಲಿದ್ದು, B ಗಣದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಗಣವನ್ನು ದತ್ತಗಣಗಳ ಅಂತರವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$A - B = \{ x \in A | x \notin B \}$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಪೂರಕ: U ಒಂದು ವಿಶ್ವಗಣವಾಗಿದ್ದು, A ಯಾವುದೇ ಗಣವಾದಾಗ $U-A$ ಅನ್ನು Aಯ ಪೂರಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು A^c ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೆವೆ.

ಅಂದರೆ $A^c = U - A = \{ x \in U \mid x \notin A \}$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಟೀಶಿಯಸ್ ಗುಣಲಬ್ಧ: (a,b) ಎಂಬ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ a ಮೊದಲನೇ ಅಂಶ, b ಎರಡನೆಯ ಅಂಶ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. (a,b) ಮತ್ತು (c,d) ಎಂಬ ಎರಡು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಲು, $a = c$ ಮತ್ತು $b = d$ ಆಗಿರಬೇಕು. A ಮತ್ತು B ಎಂಬುವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಕಾರ್ಟೀಶಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು $A \times B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, \; b \in B \}$$

ಉದಾಹರಣೆ: $A = \{1, 2\}$ ಮತ್ತು $B = \{ 4, 5, 6 \}$ ಆದಾಗ,

$$A \times B = \{ (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6) \}$$

1.2 ಸಂಬಂಧಗಳು

A ಒಂದು ಗಣವಾದರೆ, $A \times A$ ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ R ಅನ್ನು A ಮೇಲಣ ಒಂದು '**ಸಂಬಂಧ**'ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(a,b) ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವು R ನ ಅಂಶವಾದರೆ, $a R b$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು a ಎಂಬುದು b ಯೊಡನೆ R ಸಂಬಂಧ ಪಡೆದಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಸಮಾನತೆ ಸಂಬಂಧ: A ಒಂದು ಗಣವಾಗಿದ್ದು R ಅದರ ಮೇಲಿನ ಸಮಾನತೆ ಸಂಬಂಧ ಎನಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು :

(1) *ಪ್ರತಿಫಲನ* : ಪ್ರತಿಫಲನ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ, A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶ a ಗೂ, $a\ R\ a$ ಆಗಿರಬೇಕು.

(2) *ಸಮಾಂಗತೆ* :ಸಮಾಂಗತೆ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ, A ನ ಪ್ರತಿ a, b ಅಂಶಗಳಿಗೆ aRb ಆಗಿದ್ದರೆ, $b\ R\ a$ ಯೂ ಆಗಿರಬೇಕು.

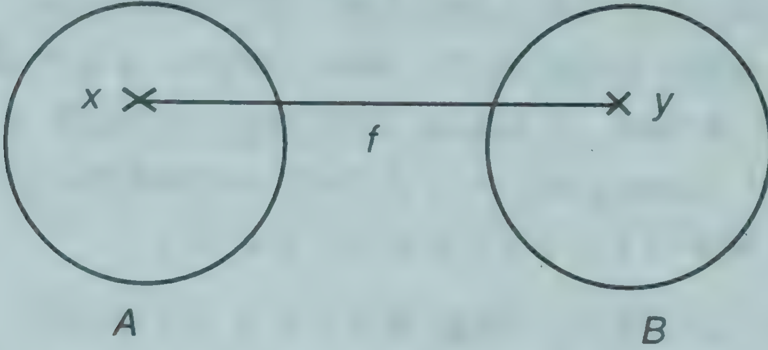
(3) *ವಾಹಕ* : ವಾಹಕ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ, A ನ ಪ್ರತಿ a, b ಮತ್ತು c ಅಂಶಗಳಿಗೆ $a\ R\ b$ ಮತ್ತು $b\ R\ c$ ಆಗಿದ್ದರೆ $a\ R\ c$ ಆಗಿರಬೇಕು.

1.3 ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

A ಎಂಬ ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶ x ಗೂ B ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧಿತವಾದ ಏಕೈಕ ಗಣಾಂಶ y ಎಂಬುದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ನಿಯಮವನ್ನು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಹ ಒಂದು ನಿಯಮವನ್ನು(ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು) f ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, y ಗಣಾಂಶವನ್ನು x ಗಣಾಂಶದ 'ಛಾಯೆ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

$$y = f(x)$$

ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 1.1)



ಚಿತ್ರ 1.1

ಸೂಚನೆ: ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$y = 3x + 5.$$

ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಬಂಧಗಳ ಮೂಲಕ ಈ ಕೆಳಕಂಡತೆಯೂ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

ಉತ್ಪನ್ನಗಳು (ಸಂಬಂಧಗಳ ಮೂಲಕ): A ಮತ್ತು B ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾದಾಗ A ಗಣದಿಂದ B ಗಣಕ್ಕೆ ಉತ್ಪನ್ನ f ಎಂಬುದು $A \times B$ ಎಂಬ ಗಣದ ಉಪಗಣ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ $a \in A$ ಗೂ ಏಕೈಕ $b \in B$ ಇದ್ದು $(a,b) \in f$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ, $f : A \rightarrow B$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ A ಅನ್ನು f ನ ಕ್ಷೇತ್ರವೆಂದು, B ಅನ್ನು ಅದರ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಳಗಣ ಮತ್ತು ಮೇಳಣ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು:

A ಗಣದಿಂದ B ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ವಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. A ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ a ಗೆ ಛಾಯೆಯಾಗಿ B ನಲ್ಲಿ b ಅಂಶವಿದ್ದರೆ, $\{(a,b)\}$ ಗಣವೇ ಉತ್ಪನ್ನ f ಆದರೆ, B ಗಣದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ A ನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶದ ಛಾಯೆಯಾಗಿ ಇರಬಹುದು, ಇಲ್ಲದಿರಬಹುದು. B ಗಣದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ A ಯ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅಂಶದ ಛಾಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಚಿತ್ರಣವು A ಯನ್ನು B ಯ "ಮೇಲಕ್ಕೆ" ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಹೀಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ A ಅನ್ನು B ಯ "ಒಳಕ್ಕೆ" ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ B ಗಣದ ಅಂಶವು A ಗಣದ ಎರಡು, ಮೂರು ಅಂಶಗಳ ಛಾಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಅಂಶದ ಛಾಯೆ ಆಗಿರಲೂಬಹುದು.

B ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವೂ A ಗಣದ ಒಂದು ಅಂಶದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಂಶದ ಛಾಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, A ಗಣಕ್ಕೂ ಮತ್ತು B ಗಣಕ್ಕೂ *ಏಕ-ಏಕ* ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆಗ A, B ಗಳನ್ನು *ಸಮಸಂಯೋಗಿಗಳು* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$f : A \rightarrow B$ ಒಂದು ಏಕ-ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, $f^{-1} : B \rightarrow A$ ಅನ್ನು

$f^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in f \}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $f : R \rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x) = 2x - 3$ ಎನ್ನುವುದಾದರೆ, f^{-1} ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $f(x) = y$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಆಗ, $y = 2x - 3$ ಎಂದಾಗುವುದು ಮತ್ತು

$x = \dfrac{3 + y}{2}$ ಅಥವಾ $f^{-1}(y) = \dfrac{3 + y}{2}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $f^{-1}(x) = \dfrac{3+x}{2}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಗುಣಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನ: f ಉತ್ಪನ್ನವು A ಗಣದಿಂದ B ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸಲಿ. g ಉತ್ಪನ್ನವು B ಯಿಂದ C ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸಲಿ. ಆಗ f ಮತ್ತು g ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು $g \circ f$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು A ಗಣದಿಂದ C ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in A$ ಗೂ

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : R ಎಂಬುದು ನೈಜಸಂಖ್ಯಾ ಗಣವಾಗಿದ್ದು, $f : R \rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x) = 3x - 1$ ಎಂದು ಮತ್ತು $g : R \rightarrow R$ ಅನ್ನು $g(x) = 5x^2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $g \circ f$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಂದರೆ $(g \circ f)(x) = g(3x - 1) = 5(3x - 1)^2$

$= 45x^2 - 30x + 5$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ - 1

1. $A = \{ x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \}$, $B = \{ 2, 4 \}$ ಮತ್ತು $C = \{ 4, 5 \}$ ಆದಾಗ $(A - B) \times (B - C)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಉತ್ಪನ್ನ $f : R \rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x) = 2x + 5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದಾಗ, f ಏಕ - ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

3. $A = \{ a, b \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ ಮತ್ತು $C = \{ 3, 5, 7, 9 \}$ ಆದಾಗ $(A \times B) \cap (A \times C)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $f : R \rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x) = x^2 - 3x + 5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, $f^{-1}(3)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $f : R \to R$ ಮತ್ತು $g : R \to R$ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು $f(x) = x^2 + x + 1$ ಮತ್ತು $g(x) = 2x - 1$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ (i) $f \circ g(x)$ (ii) $f \circ f(2)$ (iii) $g \circ g(3)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

6. ಉತ್ಪನ್ನ $f : R \to R$ ಅನ್ನು $f(x) = 2x + 1$ ಎಂದು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನ $g : R \to R$ ಅನ್ನು $g(x) = x^2 - 2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $g \circ f$ ಮತ್ತು $f \circ g$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.4 ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳು

ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ ಎಂಬುದು ಗಣಿತದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತ. ಯಾವುದೇ ಗಣ Aಯು Nಗೆ ಸಮಸಂಯೋಗಿ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಅನ್ನು "ಪ್ರಗಣನೀಯ"ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು 'ಪರಿಮಿತ ಗಣ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಗಣ A ಪ್ರಗಣನೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದನ್ನು ನಾವು ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಗಣನೀಯವಲ್ಲದ ಗಣವನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಅಥವಾ ಅನಂತ ಮತ್ತು ಎಣಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $N = \{1,2, 3 ......\}$ ಮತ್ತು

$E = \{2, 4, 6, ...\}$ ಆಗಿದ್ದು

ಉತ್ಪನ್ನ $f : N \to E$ ಅನ್ನು ಪ್ರತಿ $n \in N$ ಗೂ $f(n) = 2n$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

N ಗಣವು E ಗಣಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಯೋಗಿ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

E ಗಣವನ್ನು ಪ್ರಗಣನೀಯ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ: ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಗಣದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಮೂಲಕ ದತ್ತಗಣವು ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಎಣಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

"ಅನಂತ ! ಬೇರೆ ಯಾವ ಪ್ರಶ್ನೆಯೂ ಮಾನವನ ಅಂತರಂಗವನ್ನು ಇಷ್ಟೊಂದು ಗಾಢವಾಗಿ ತಟ್ಟಿಲ್ಲ."

- ಡೇವಿಡ್ ಹಿಲ್ಬರ್ಟ್

"ಗಣಿತವು ಅನಂತದ ವಿಜ್ಞಾನ !" **- ಹರ್ಮನ್‌ವೈಲ್**

ಅಧ್ಯಾಯ - 2
ಗಣಿತ ತರ್ಕ

2.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಗಣಿತ ತರ್ಕದ ಬಗ್ಗೆ ಮೊದಲು ಚಿಂತನೆ ಮಾಡಿದವರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಲೈಬ್ನಿಜ್ (1646–1716). ನಂತರದ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲ್, ಡಿಮಾರ್ಗನ್, ಸಿ. ಎಸ್. ಪೀಯರ್ಸ್, ಜಿ. ಫ್ರೆಜ್ ಮತ್ತು ಜಿ. ಪಿಯಾನೊ ಇವರುಗಳು ಗಣಿತತರ್ಕದ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನಷ್ಟು ಆಳವಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನಿತ್ತರು. ಆನಂತರ ವೈಟ್‌ಹೆಡ್ ಮತ್ತು ರಝಲ್ ಅವರುಗಳ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಪುಸ್ತಕ ಹಾಗೂ ಡೆವಿಡ್ ಹಿಲ್‌ಬರ್ಟ್ ಮತ್ತು ಪಾಲ್‌ಬರ್ನೆಸ್ ಅವರುಗಳ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ಚಿಂತನೆಯಿಂದ ಈ ಗಣಿತ ತರ್ಕ ಒಂದು ಸ್ಪಷ್ಟ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿತು.

2.2 ಉಕ್ತಿಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ದತ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ 'ನಿಜ' ಅಥವಾ 'ಸುಳ್ಳು' ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದಾದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು *ಉಕ್ತಿ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

(1) ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ 180°

(2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು

(3) ಎಲ್ಲ ಹುಡುಗಿಯರೂ ಸುಂದರವಾಗಿರುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ (1), (2) ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನಿಜವೆಂದೂ (3) ನೇ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಸುಳ್ಳೆಂದು ಹೇಳಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, ಇವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಉಕ್ತಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2.3 ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜತ್ವ ಅಥವಾ ಸುಳ್ಳುತನವನ್ನು ಅದರ ನಿಜಮೌಲ್ಯವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿಜತ್ವವನ್ನು T ಎಂದೂ ಸುಳ್ಳುತನವನ್ನು F ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

2.4 ಸಂಯೋಜಕಗಳು

ತಾರ್ಕಿಕವಾದ ಒಂದು ವಾದದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತ ಉಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಾಗ ನಾವುಗಳು "ಅಲ್ಲ" ಅಥವಾ "ಹೌದು" ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ "ಮತ್ತು", "ಅಥವಾ", "ಆಗಿದ್ದರೆ,....ಆಗ", "ಆದರೆ, ಆದರೆ ಮಾತ್ರ" ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿ ಉಕ್ತಿಗಳ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಪದಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ***ಸಂಯೋಜಕ***ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಯ ಜೋಡಣೆಯ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ "ಅಲ್ಲ" ಅಥವಾ "ಹೌದು" ಎಂಬ ಪದ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ***ಏಕಸಂಯೋಜಕ***ವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಸಂಯೋಜಕಗಳನ್ನು ***ದ್ವಿಸಂಯೋಜಕ***ಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಯೋಜಕಗಳಿಂದ ಕೂಡಿಸುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ***ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿರುವ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅದರ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳಿಲ್ಲದಿರುವ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸರಳೋಕ್ತಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2.5 ಸಮುಚ್ಚಯ

"ಮತ್ತು" ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಸಂಯೋಜಿತವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ***ಸಮುಚ್ಚಯ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: 1. ಆಕಾಶವು ನೀಲಿಯಾಗಿದೆ

2. ಹವೆಯು ತಂಪಾಗಿದೆ

ಇವೆರಡು ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು"ಮತ್ತು" ಎನ್ನುವ ಪದ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು : ಆಕಾಶವು ನೀಲಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಹವೆಯು ತಂಪಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು p, q, r ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ "p ಮತ್ತು q" ಅನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \wedge q$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. $\wedge$ ಸಂಕೇತವು "ಮತ್ತು" ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 1. ಗುಲಾಬಿಯು ಒಂದು ಹೂವು.

2. ಗುಲಾಬಿಯು ಸುಂದರವಾಗಿದೆ.

ಈ ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯವು "ಗುಲಾಬಿಯು ಒಂದು ಹೂವು ಮತ್ತು ಗುಲಾಬಿಯು ಸುಂದರವಾಗಿದೆ." ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \wedge q$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು qಗಳು ಮೇಲಿನ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಸಮುಚ್ಚಯದ ನಿಜ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುವಲ್ಲಿ ಈ ಒಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದೇನೆಂದರೆ, p ಮತ್ತು q ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನಿಜವಾಗಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ $p \wedge q$ ನಿಜವಾಗಿರುವುದು, ಬೇರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅದು ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವುದು.

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 1

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2.6 ಪರ್ಯಾಯ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾದಾಗ "ಅಥವಾ" ಎಂಬ ಸಂಯೋಜಕದಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \vee q$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. "$\vee$" ಸಂಕೇತ "ಅಥವಾ" ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿ "ಅಥವಾ" ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಸಂಯೋಜಿತವಾಗಿರುವ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು **ಪರ್ಯಾಯ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: 1. ಸೀತೆಯು ಜನಕರಾಜನ ಮಗಳು

2. ಸೀತೆಯು ಶ್ರೀರಾಮನ ಹೆಂಡತಿ

ಈ ಉಕ್ತಿಗಳ ಪರ್ಯಾಯವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

"ಸೀತೆಯು ಜನಕರಾಜನ ಮಗಳು ಅಥವಾ ಸೀತೆಯು ಶ್ರೀರಾಮನ ಹೆಂಡತಿ".

p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾದಾಗ $p \vee q$ ನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸುವಲ್ಲಿ ಈ ಮುಂದಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ. p ಮತ್ತು q ಎರಡರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ನಿಜವಾದ್ದಲ್ಲಿ $p \vee q$ ಅನ್ನು ನಿಜವೆಂದೂ ಉಳಿದೆಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸುಳ್ಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 2

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ಅಂದರೆ, p ಮತ್ತು q ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳೂ ಸುಳ್ಳಾದಾಗ ಮಾತ್ರ $p \vee q$ ಪರ್ಯಾಯೋಕ್ತಿಯೂ ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2.7 ನಿಬಂಧಿತ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : p ಮತ್ತು qಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರುವಾಗ "p ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ q" ಎನ್ನುವ ರೂಪದ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು *ನಿಬಂಧಿತ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ p ಅನ್ನು ದತ್ತವೆಂದೂ, q ಅನ್ನು ತೀರ್ಮಾನವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು ನಾವು $p \rightarrow q$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: 1. ABC ತ್ರಿಕೋನವು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ

2. $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$

ಈ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿಬಂಧಿತ ಸಂಯೋಜಕದ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ, "ABC ತ್ರಿಕೋನವು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾದರೆ ಆಗ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ." p ಮತ್ತು q ಎರಡು ಯಾವುದೇ ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರುವಾಗ ನಿಬಂಧಿತದ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಾವು ಈ ಮುಂದಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ. pಯು ನಿಜ ಮತ್ತು q ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ $p \rightarrow q$ ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮಿಕ್ಕ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅದು ನಿಜವಾಗಿರುವುದು.

ನಿಜ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 3

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

2.8 ಸಮತೋಕ್ತಿಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರುವಾಗ, " p ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ q ಮತ್ತು q ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ p" ಎನ್ನುವ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ***ಸಮತೋಕ್ತಿ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು $p \leftrightarrow q$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು *ದ್ವಿಬಂಧಿತ*ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: 1. $2n$ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ

2. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಮತೋಕ್ತಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು : $2n$ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ $2n$ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಮತೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಲು ನಾವು ಈ ಮುಂದಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ: p ಮತ್ತು q ಎರಡೂ ನಿಜವಾಗಿರುವಾಗ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವಾಗ $p \leftrightarrow q$ ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 4

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

2.9 ನಕಾರ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: p ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ "ಇಲ್ಲ" ಎನ್ನುವ ಪದವನ್ನು ಯುಕ್ತ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು p ಉಕ್ತಿಯ *ನಕಾರ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಅದನ್ನು $\sim p$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: ಭೂಮಿಯು ಗೋಲಾಕಾರವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು p ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಭೂಮಿಯು ಗೋಲಾಕಾರವಾಗಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವ ಅದರ ನಕಾರವನ್ನು $\sim p$ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ನಕಾರದ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಲು ಮುಂದಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದೇ ಉಕ್ತಿ p ನಿಜವಾಗಿರುವಾಗ $\sim p$ ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ. ವಿಪರ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇದು ಸರಿ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಅಂದರೆ, p ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವಾಗ $\sim p$ ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 5

p	$\sim p$
T	F
F	T

2.10 ವಿಲೋಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಧನ

p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರುವಾಗ $p \rightarrow q$ ದತ್ತ ನಿಬಂಧಿತವಾಗಿದ್ದರೆ

(i) $q \rightarrow p$ ಅನ್ನು ಇದರ *ವಿಲೋಮ* ಎಂದೂ

(ii) $\sim p \rightarrow \sim q$ ಅನ್ನು ಇದರ *ಪ್ರತಿಲೋಮ* ಎಂದೂ

(iii) $\sim q \rightarrow \sim p$ ಅನ್ನು ಇದರ *ಪ್ರತಿಧನ* ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: "ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿದ್ದರೆ ಆಗ ಮಳೆ ಬರುತ್ತದೆ" ಎನ್ನುವುದು ದತ್ತ ನಿಬಂಧಿತವಾದರೆ,

(i) ಇದರ ವಿಲೋಮ, $q \rightarrow p$: ಮಳೆ ಬಂದರೆ ಆಗ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿರುತ್ತವೆ;

(ii) ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ, $\sim p \rightarrow \sim q$: ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮಳೆ ಬರುವುದಿಲ್ಲ; ಮತ್ತು

(iii) ಇದರ ಪ್ರತಿಧನ, $\sim q \rightarrow \sim p$: ಮಳೆ ಬರದಿದ್ದಾಗ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

2.11 ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಂತಹ ಎರಡು ಸರಳ ಉಕ್ತಿಗಳು ***ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ*** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ನಿಜ ಉಕ್ತಿಗಳು ಅಥವಾ ಎರಡು ಸುಳ್ಳು ಉಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \equiv q$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 6

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ $p \rightarrow q$ ಮತ್ತು $\sim q \rightarrow \sim p$ ಈ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿಜವಾಗಿದ್ದಾಗ ಇನ್ನೊಂದೂ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸುಳ್ಳಾದಾಗ ಇನ್ನೊಂದೂ ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$$

2.12 ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳು

ವಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳು ನಿಜವಾಗಿರಲಿ ಅಥವಾ ಸುಳ್ಳಾಗಿರಲಿ ಆದರೆ ಆ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ನಿತ್ಯಸತ್ಯ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: p : ಹಣ್ಣು ಸಿಹಿಯಾಗಿದೆ

$\sim p$: ಹಣ್ಣು ಸಿಹಿಯಾಗಿಲ್ಲ

$p \vee \sim p$ ಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 7

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*

ಇಂತಹ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2.13 ಅಸಮಂಜಸತೆ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಸುಳ್ಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು *ಅಸಮಂಜಸತೆ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

p ಒಂದು ಯಾವುದೇ ಉಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, $p \wedge \sim p$ ಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ '8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 8

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*

ಇಂತಹ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಸಮಂಜಸತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 1 : *ಒಂದು ನಿಬಂಧಿತವೂ ಅದರ ವಿಲೋಮವೂ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಲ್ಲ.*

ಉದಾ: "ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 8ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದು 5ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ". ಈ ನಿಬಂಧಿತವು ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮ, "ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 5ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದು 10 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ." ಇದು ನಿಜವೇ ಆಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆದಾಗ ಅವುಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಲ್ಲ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 : ***ಒಂದು ನಿಬಂಧಿತವೂ ಅದರ ಪ್ರತಿಲೋಮವೂ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಲ್ಲ.***

ಉದಾ: "ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾಥಿಯು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಪಿ ಮಾಡಿದರೆ ಆಗ ಪಾಸಾಗುತ್ತಾನೆ" ಈ ನಿಬಂಧಿತವು ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಆದರೆ ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ, "ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಪಿ ಮಾಡದಿದ್ದರೆ ಆಗ ಪಾಸಾಗುವುದಿಲ್ಲ". ಇದು ಸುಳ್ಳಾಗಿರಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಿಬಂಧಿತವೂ ಅದರ ಪ್ರತಿಲೋಮವೂ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಲ್ಲ.

ಪ್ರಮೇಯ 3 : ***ಒಂದು ನಿಬಂಧಿತವೂ ಅದರ ಪ್ರತಿಧನವೂ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.***

ಉದಾ: "ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಪಿಮಾಡಿದರೆ ಪಾಸಾಗುತ್ತಾನೆ." ಈ ನಿಬಂಧಿತವು ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಇದರ ಪ್ರತಿಧನವು "ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪಾಸಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅವನು ಕಾಪಿ ಮಾಡಿರುವುದಿಲ್ಲ". ಇದು ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ನಿಬಂಧಿತವೂ ಅದರ ಪ್ರತಿಧನವೂ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ಈ ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ, $p \rightarrow q$ ಎಂಬುದರ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸಲು $\sim q \rightarrow \sim p$ ಎಂಬುದರ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಪ್ರಮೇಯ 4: ***ಒಂದು ನಿಬಂಧಿತ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮ ಇವೆರಡರ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅವುಗಳ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.*** ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$ ಇವೆರಡರ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಾಗ p ಮತ್ತು qಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, p ಮತ್ತು q ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವಾಗ $p \rightarrow q$ ಮತ್ತು $q \rightarrow p$ ಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುವು.

ಸಾಧನೆ:

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 9

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ಪ್ರಮೇಯ 5 : ***ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ನಕಾರವು ಅವುಗಳ ನಕಾರಗಳ ಪರ್ಯಾಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.***

ಅಂದರೆ, $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಉದಾ: "ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ."

ಇದರ ನಕಾರವು "ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ ಅಥವಾ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ" ಎಂದಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಸಮುಚ್ಚಯವು ನಿಜವಾಗಲು ಎರಡು ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳೂ ನಿಜವಾಗಬೇಕು. ಅದರ ನಕಾರವು ನಿಜವಾಗಲು ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ನಕಾರಗೊಂಡ ಒಂದು ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಯಾದರೂ ನಿಜವಾಗಬೇಕು.

ಪ್ರಮೇಯ 6 : ***ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳ ಪರ್ಯಾಯದ ನಕಾರವು ಅವುಗಳ ನಕಾರಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.***

ಅಂದರೆ $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

"ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯು 2ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ ಅಥವಾ 5ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ." ಇದರ ನಕಾರವು "ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಲ್ಲ ಮತ್ತು 5ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಲ್ಲ" ಎಂದಾಗುವುದು.

ಒಂದು ಪರ್ಯಾಯವು ನಿಜವಾಗಲು ಅದರ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಯು ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೂ ಸಾಕು. ಅದರ ನಕಾರವು ನಿಜವಾಗಲು, ನಕಾರಗೊಂಡ ಎರಡು ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳೂ ನಿಜವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಮೇಯ 7: ~ (~p) ↔ p ಯು ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 10

p	~p	~(~p)	~(~p) ↔ p
T	F	T	T
F	T	F	T

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಉದ್ದಸಾಲಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎಲ್ಲಾ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು T ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ~(~p) ↔ p ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8 : [(p → q) ↔ (~q) → (~p)] ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 11

p	q	~p	~q	p → q	~q → ~p	(p → q) ↔ ~q → ~p
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, 5ನೇ ಮತ್ತು 6ನೇ ಉದ್ದಸಾಲುಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ ಮತ್ತು 7ನೇ ಉದ್ದಸಾಲಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳೂ T ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (p → q) ↔ (~q) → (~p) ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 2

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   (a) ಶಾರದೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಹಾಡುತ್ತಾಳೆ ಮತ್ತು ಶಾಂತಲೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ನಾಟ್ಯವಾಡುತ್ತಾಳೆ.

   (b) ಮಳೆ ಬಂದರೆ ಆಗ ಬೆಳೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

2. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   p : ಮಕ್ಕಳು ಜಾಣರಾಗುತ್ತಾರೆ.

   q : ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುತ್ತಾರೆ.

   r : ಶಾಲೆಗೆ ರಜೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

   s : ಅವರು ಸಂತೋಷಪಡುತ್ತಾರೆ.

   (a) ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಅವರು ಸಂತೋಷಪಡುತ್ತಾರೆ.

   (b) ಶಾಲೆಗೆ ರಜೆ ನೀಡಲಾದರೆ ಆಗ ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ.

   (c) ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲವಾದರೆ ಆಗ ಮಕ್ಕಳು ಜಾಣರಲ್ಲ ಮತ್ತು ಅವರು ಸಂತೋಷಪಡುತ್ತಾರೆ.

   (d) ಮಕ್ಕಳು ಜಾಣರಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋದರೆ ಮಾತ್ರ ಮಕ್ಕಳು ಜಾಣರಾಗುತ್ತಾರೆ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $\sim (p \rightarrow \sim q)$

   (ii) $\sim p \vee q$

   (iii) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

   (iv) $\sim (p \wedge q) \vee (q \leftrightarrow p)$

4. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳ ನಕಾರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $p \vee (q \wedge r)$

(2) $p \wedge (q \rightarrow r)$

(3) $\sim p \rightarrow q$

(4) $\sim p \leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$

5. ಕೆಳಗಿನ ನಿಬಂಧಿತಗಳ ವಿಲೋಮ, ಪ್ರತಿಲೋಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಧನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $\sim p \rightarrow \sim q$ (2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

6. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

(ii) $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge (\sim q)$

(iii) $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \rightarrow q$

7. p ಉಕ್ತಿಯು $x + 1 = 9$ ಎಂದೂ q ಉಕ್ತಿಯು $x = 6$ ಎಂದೂ ಇದ್ದು $p \rightarrow q$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ ವಿಲೋಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಧನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

8. "$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಇದರ ನಕಾರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 3

ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

3.1 ಕೋಶಗಳು: *ಗಣವೊಂದರಲ್ಲಿನ mn ಅಂಶಗಳ m ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು n ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿನ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು $m \times n$ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕೋಶವನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.*

ಈ ಕೋಶವನ್ನು

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೋಶದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವನ್ನು a_{ij} ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದು i ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮತ್ತು j ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ವಿವಿಧ ನಮೂನೆಯ ಕೋಶಗಳು :

1. **ಅಡ್ಡಸಾಲುಕೋಶ:** ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿರುವ ಕೋಶವನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೆವೆ.

   ಉದಾಹರಣೆ : $A = [\ 1 \quad 2 \quad 3\ ]$

2. **ಕಂಬಸಾಲು ಕೋಶ:** ಒಂದೇ ಒಂದು ಕಂಬ ಸಾಲಿರುವ ಕೋಶವನ್ನು ಕಂಬಸಾಲು ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

   ಉದಾಹರಣೆ: $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

3. **ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶ:** ಕೋಶವೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಚೌಕುಳಿಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೆವೆ.

ಉದಾ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

4. **ಕರ್ಣಕೋಶ:** ಚೌಕುಳಿಕೋಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಕರ್ಣಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

5. **ಏಕಮಾನ ಕೋಶ:** ಕರ್ಣಕೋಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು 1 ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಏಕಮಾನ ಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. **ಶೂನ್ಯಕೋಶ:** ಕೋಶವೊಂದರಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ಶೂನ್ಯಕೋಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಶಗಳ ಸಂಕಲನ : A ಮತ್ತು B ಕೋಶಗಳು ಒಂದೇ ದರ್ಜೆಗಳಾದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂಕಲಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ ಎಂದಾದರೆ

$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 & b_1 + y_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 + y_2 \end{bmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶಗಳನ್ನು ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $A-B = \begin{bmatrix} a_1 - x_1 & b_1 - y_1 \\ a_2 - x_2 & b_2 - y_2 \end{bmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಕೋಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ: *A* ಕೋಶವು $m \times n$ ದರ್ಜೆಯದಾಗಿದ್ದು, *B* ಕೋಶವು $n \times p$ ದರ್ಜೆಯದಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ *AB* ಗುಣಲಬ್ಧವು $m \times n$ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕೋಶಗಳೆರಡನ್ನು ಗುಣಿಸಲು ಮೊದಲನೆಯದರ ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡನೆಯದರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2x1}$ ಆದಲ್ಲಿ ಆಗ

$$AB = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}_{2x1}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕೋಶದ ಗುಣಾಕಾರ : *k* ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ಒಂದು 2x2 ಕೋಶವಾಗಿದ್ದರೆ

$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, *A* ಕೋಶವೊಂದನ್ನು *k* ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು *k* ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

3.2 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ಒಂದು ಚೌಕುಳಿಕೋಶವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು Δ ಒಂದು ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶಗಳ ಗಣದಿಂದ ಸಹಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವೊಂದಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಚಿತ್ರಣವಾಗಿರಲಿ

ಅಂದರೆ $\Delta : M(2, R) \rightarrow R$ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು

$$\Delta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯಿಸಿ. ಇಂತಹ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕ ಚಿತ್ರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಚೌಕುಳಿಕೋಶದ ನಿರ್ಧಾರಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ Δ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಮೂರನೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶಗಳ ಗಣದಿಂದ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಫಲವಾಗಿ, $\Delta : M(3, R) \rightarrow R$ ಅನ್ನು

$$\Delta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31})$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಹಾಗೂ ಈ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

1. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ $A = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಈಗ, $|A|$ ನ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲುಮಾಡಿದ ನಿರ್ಧಾರಕವು $|A'|$ ಎಂದಿರಲಿ. ಅಂದರೆ

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$|A'|$ ಅನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಿಂದ ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$|A'| = a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದ $|A| = |A'|$ ಎನ್ನುವುದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವುದು.

2. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು –1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ $|A| = a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಈಗ, $|A|$ ನ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಿಂದ ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_1(b_2c_3-c_2b_3)+b_1(a_2c_3-c_2a_3)-c_1(a_2b_3-b_2a_3)$$

$$= -[a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3) + c_1(a_2b_3-b_2a_3)]$$

$= -|A|$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ನಿರ್ಧಾರಕವು –1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

3. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಅಥವಾ ಎರಡು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಅಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅಂತಹ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$\begin{aligned} |A| &= a_1(b_1c_3-c_1b_3)-b_1(a_1c_3-c_1a_3)+c_1(a_1b_3-b_1a_3) \\ &= a_1b_1c_3-a_1c_1b_3-b_1a_1c_3+b_1c_1a_3+c_1a_1b_3-c_1b_1a_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ನಂತರ ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= ka_1(b_2c_3-c_2b_3)-kb_1(a_2c_3-c_2a_3)+kc_1(a_2b_3-b_2a_3) \\ &= k[a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)] \\ &= k|A| \end{aligned}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

5. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$|A| = (a_1+x)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} -(b_1+y)\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + (c_1+z)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+ x\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

6. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಥವಾ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಪಡೆಯುವ ಮೊತ್ತದಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಮೊದಲನೆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳಿಗೆ l ನಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಂಕಲಿಸಿದಾಗ

$$\begin{vmatrix} a_1+la_2+ka_3 & b_1+lb_2+kb_3 & c_1+lc_2+kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಮೇಲಿನ 4ನೇ ಮತ್ತು 5ನೇ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ ನಿರ್ಧಾರಕವು

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

3ನೇ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + l(0) + k(0) = |A|$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವುದು.

7. A ಮತ್ತು B ಎರಡು 2×2 ದರ್ಜೆಯ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $|AB| = |A|\,|B|$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ ಮತ್ತು $$B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ಕೋಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, $$AB = \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಕೋಶಗಳ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

$$|A| = ad - bc, \quad |B| = wz - xy$$

ಮತ್ತು $$\begin{aligned} |AB| &= (aw+by)(cx+dz)-(ax+bz)(cw+dy) \\ &= adwz-adxy-bcwz-bcxy \\ &= ad[wz-xy]-bc[wz-xy] \\ &= (ad-bc)(wz-xy) = |A|\;|B| \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $|AB| = |A|\,|B|$ ಎನ್ನುವುದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ 3×3 ದರ್ಜೆ ಕೋಶಗಳಿಗೂ ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

1. $$\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = 0$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು R_1, R_2, R_3 ಎಂದು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು C_1, C_2, C_3 ಏಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಈ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ $C_2 - C_1$ ಮತ್ತು $C_3 - C_2$ ಮಾಡಿದಾಗ

$$\begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(ಕಾರಣ C_2 ಮತ್ತು C_3 ಅಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ $R_1 - R_2$ ಮತ್ತು $R_2 - R_3$ ಮಾಡಿದಾಗ

$$\begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಿಂದ ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$(a-b)(b-c)\ [b+c-a-b] = (a-b)(b-c)(c-a)$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ – 3.1

1. $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ

   AB ಮತ್ತು BA ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\begin{bmatrix} 2x+y \\ 2x-4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ

   ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $A = [x \quad y \quad z]$, $B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು

   $C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ಆದರೆ $A(BC) = (AB)C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = 3a^2+a^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = ab+bc+ca+abc$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $\begin{vmatrix} 3 & 3^2 & 3^3 \\ 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 3^3 & 3^4 & 3^5 \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. $\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. $\begin{vmatrix} 0 & xy^2 & xz^2 \\ x^2y & 0 & yz^2 \\ x^2z & y^2z & 0 \end{vmatrix} = 2x^3y^3z^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $\begin{vmatrix} p & q+r & 1 \\ q & r+p & 1 \\ r & p+q & 1 \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11. $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3.3.1 ಲಾಘುವ, ಸಹಗುಣಕ ಮತ್ತು ಸಂಗತಕೋಶ

ಲಾಘುವ: *A* ಒಂದು ಚೌಕುಳಿಕೋಶವಾಗಿರಲಿ. *A* ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶದ ಲಾಘುವವು, ಆ ಅಂಶವಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದಿರುವ ಉಪಕೋಶದ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ಎಂದಾದರೆ

a_{23} ಅಂಶದ ಲಾಘುವವು,

$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು

ಆದ್ದರಿಂದ a_{ij} ಅಂಶದ ಲಾಘುವವು M_{ij}, i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು j ನೇ ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಹಗುಣಕ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ಚೌಕುಳಿಕೋಶದಲ್ಲಿನ a_{31}ನ ಲಾಘುವ $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಆಗ $(-1)^{3+1} M_{31}$ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು a_{31} ಅಂಶದ ***ಸಹಗುಣಕ***ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ a_{ij} ಅಂಶದ ಲಾಘುವವು M_{ij} ಆದರೆ ಅದರ **ಸಹಗುಣಕವು** $(-1)^{i+j} M_{ij}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಸಂಗತಕೋಶ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿರಲಿ.

ಈ ಕೋಶದ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಕೋಶವು $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಾದರೆ ಈ ಕೋಶದ

ಅದಲು ಕೋಶವು $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಕೋಶವನ್ನು

A ನ ***ಸಂಗತಕೋಶ***ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ Adj A ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುವುದು.

3.3.2 ವೈಶೇಷಿಕ ಮತ್ತು ಅವೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶಗಳು

A ಒಂದು ಚೌಕುಳಿಕೋಶವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ನಿರ್ಧಾರಕವು $|A| = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ***ವೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶ***ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ $|A| \neq 0$ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಕೋಶವನ್ನು ***ಅವೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶ***ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3.3.3 ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ

A ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದು, $AB = BA = I$ ಆಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶ B ಇದ್ದರೆ. B ಅನ್ನು Aನ ಪ್ರತಿಲೋಮವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ I ಎಂಬುದು ಅದೇ ದರ್ಜೆಯ ಏಕಮಾನ ಕೋಶ.

ಪ್ರಮೇಯ : A ಒಂದು ಯಾವುದೇ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$A(\mathrm{Adj}A) = (\mathrm{Adj}A)A = |A|\ I$$

ಸಾಧನೆ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

Aನ ಸಹಗುಣಕ ಕೋಶ $= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಆಗ, Aನ ಸಂಗತಕೋಶ $= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈಗ, A ಮತ್ತು $\mathrm{Adj}A$ ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$A(\mathrm{Adj}A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$ ಎಂದಾಗುವುದು

ಅಥವಾ $A(\mathrm{Adj}A) = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\ I$ ಎಂದಾಗುವುದು

ಇದೇ ರೀತಿ $(\mathrm{Adj}A)A = |A|\ I$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A(\mathrm{Adj}A) = (\mathrm{Adj}A)A = |A|\ I$ ಎನ್ನುವುದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವುದು.

ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮದ ಸ್ಪಷ್ಟನೆಗನುಗುಣವಾಗಿ ಯಾವುದೇ A ಎಂಬ ಅವೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಅದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶ B ಆಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ಇರುವ ನಿಯಮವು

$$AB = BA = I \quad .... (1)$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ

$$A(\text{Adj}A) = (\text{Adj}A)A = |A| \, I \quad .... (2)$$

ಎನ್ನುವುದು ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ A ಒಂದು ಅವ್ಯೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶವಾದರೆ ಆಗ $|A| \neq 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು $|A|$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$A\left(\frac{\text{Adj}A}{|A|}\right) = \left(\frac{\text{Adj}A}{|A|}\right) A = I \quad .... (3)$$

ಎಂದಾಗುವುದು

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (3) ಇವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ A ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ A^{-1} ಗೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|} \text{ (ಇಲ್ಲಿ } |A| \neq 0)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ Aಯ ಸಂಗತಕೋಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲು, ಒಂದನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. ಆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ

ಮೊದಲನೇ ಅಂಶ 1 ರ ಸಹಗುಣಕ $= (-1)^{1+1}(6-3) = 3$

ಎರಡನೇ ಅಂಶ 1 ರ ಸಹಗುಣಕ $= (-1)^{1+2}(3+6) = -9$

ಮೂರನೇ ಅಂಶ 1 ರ ಸಹಗುಣಕ $= (-1)^{1+3}(-1-4) = -5$

ಇದೇ ರೀತಿ, 2ನೇ ಮತ್ತು 3ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $-4, 1, 3$ ಮತ್ತು $-5, 4, 1$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A ನ ಸಂಗತಕೋಶವು

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ ಆಗುತ್ತದೆ

(ಅಂದರೆ ಸಂಗತಕೋಶವು ಸಹಗುಣಕಗಳ ಕೋಶದ *ಅವಲು ಕೋಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ*).

2. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮಕೋಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲು $|A|$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ:

$$|A| = 2(-5)+2(0)+4(5)= 10$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆನಂತರ

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -16 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj}A}{|A|}$ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/5 & -8/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 3.2

I. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಕೋಶಗಳ ಸಂಗತಕೋಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

II ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಕೋಶಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $A(\text{Adj}A) = (\text{Adj}A)A = |A|\,I$ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3.4 ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ

(i) ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿ (ii) ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮ.

3.4.1 ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿ : x, y, z ನಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

$$a_1x+b_1y+c_1z = d_1$$

$$a_2x+b_2y+c_2z = d_2$$

$$a_3x+b_3y+c_3z = d_3$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

x,y,z ಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳ ಕೋಶ $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಕೋಶ $B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಚರಾಂಕಗಳ ಕೋಶ

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ $AX=B$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ***ಕೋಶ ಸಮೀಕರಣ***ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು A^{-1} ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$A^{-1}\ (AX) = A^{-1}\ (B)$$

ಅಥವಾ $(A^{-1}\ A)\ X = A^{-1}B$

ಅಥವಾ $IX = A^{-1}\ B$

ಆದ್ದರಿಂದ $X = A^{-1}\ B$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: $x+y+z = 6,\ x-y+z = 2,\ 2x+y-z = 1$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore |A| = 1(0)-1(-3)+1(3) = 6$ ಆಗುವುದು.

ಮತ್ತು $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಆಗ $X = A^{-1}\ B = \dfrac{\text{Adj}A}{|A|}\ B$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ ಆಗುವುದು.

3.4.2 ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮ: x, y, z ನಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

$$a_1x+b_1y+c_1z = d_1$$

$$a_2x+b_2y+c_2z = d_2$$

$$a_3x+b_3y+c_3z = d_3$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

x,y,z ನ ಸಹಾಂಕಗಳ ನಿರ್ಧಾರಕ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಎಂಬುದಾಗಿ Δದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ Δ_2, Δ_3 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ Δದಲ್ಲಿನ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಅಂಶಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಆಗ x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ಈ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: $x+y+z = 6$

$x+2y+3z = 14$

$-x+y-z = -2$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5)-1(2)+1(3) = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6(-5)-1(-8)+1(18) = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-8)-6(2)+1(12) = -8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 14 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-18)-1(12)+6(3) = -12$$

ಈಗ ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಸೂಚನೆ : **ಗೇಬ್ರಿಯಲ್ ಕ್ರೇಮರ್** (1704–1752) ಎಂಬಾತನು ಸ್ವಿಜರ್ಲ್ಯಾಂಡಿನ ಗಣಿತಜ್ಞ. ಜಿನಿವಾದಲ್ಲಿ 1750ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಈತನ ಪುಸ್ತಕವು ಪ್ರಖ್ಯಾತವಾಯಿತು.

ಅಭ್ಯಾಸ – 3.3

I ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೋಶಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $x+2y+3z = 14$
$2x-y+5z = 15$
$3x-2y-4z = -13$

(2) $4x+y = 7$
$3y+4z = 5$
$3z+5x = 2$

(3) $x+2y+3z = 6$
$2x+4y+2z = 7$
$3x+2y+9z = 16$

(4) $x-3y+2z = 0$
$2x+5y+z = 1$
$3x+y-2z = 2$

II ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $2x+3y-4z = -8$
$3x+2y+4z = 3$
$5x-4y+5z = 18$

(2) $5x-3y+9 = 0$
$8x+14y+5 = 0$

(3) $4x+y = 7$
$3y+4z = 5$
$3z+5x = 2$

(4) $x+y+z = 4$
$2x+5y-2z = 3$
$3x+7y-7z = 4$

3.5 ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲಗಳು

A ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದಾಗ $A-\lambda I$ ಅನ್ನು ಅದರ ***ಲಾಕ್ಷಣಿಕಕೋಶ***ವೆಂದೂ, $|A-\lambda I| = 0$ ಆ ಕೋಶದ ***ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣ***ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು λ_1, λ_2 .... ಗಳನ್ನು ***ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲ***ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಗುಪ್ತಮೂಲ, ***ಆಯಿಗನ್ ವ್ಯಾಲ್ಯೂಸ್*** ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3.5.1 ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯ : *ಪ್ರತಿ ಚೌಕುಳಿಕೋಶವು ತನ್ನದೇ ಆದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುವುದು.*

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ದರ್ಜೆ ಕೋಶಗಳಿಗೆ ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ :

(i) A ಒಂದು ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶವಾಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ಎಂದು ಮತ್ತು ಏಕಮಾನ ಕೋಶ, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ಆಗಿರಲಿ. A ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವು

$\left| A - \lambda I \right| = 0$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, $\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದು. ಇದನ್ನು ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$(a_1-\lambda)\ (b_2-\lambda) - a_2\ b_1 = 0$$

ಅಥವಾ $\lambda^2 - \lambda\ (a_1-b_2)+a_1\ b_2-b_1\ a_2 = 0$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ A ಕೋಶವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮೀಕರಣವು

$$A^2-A(a_1-b_2)+I\ (a_1\ b_2-b_1\ a_2) = 0 \qquad \text{.... (1)}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಎಡಬದಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ; ಅಂದರೆ

$$\begin{bmatrix} a_1^2+b_1a_2 & a_1\ b_1+b_1\ b_2 \\ a_2\ a_1+b_2a_2 & a_2\ b_1+b_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1^2+a_1b_2 & b_1a_1+b_1\ b_2 \\ a_2\ a_1+b_2a_2 & a_1\ b_2+b_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1\ b_2-b_1a_2 & 0 \\ 0 & a_1\ b_2-b_1\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ಇದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಬಲಬದಿಗೆ ಸಮಾನಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವು ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ.

(ii) ಇದೇ ರೀತಿ, A ಒಂದು ಮೂರನೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು I ಒಂದು ಮೂರನೇ ದರ್ಜೆಯ ಏಕಮಾನ ಕೋಶವಾಗಿರಲಿ. A ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವು $|A-\lambda I| = 0$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಂದರೆ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದಾಗ

$$| A - \lambda I | = \begin{bmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$ ಎಂದಾಗುವುದು

ಇದನ್ನು ವ್ಯಾಕೋಚಿಸಿದಾಗ

$$-\lambda^3+\lambda^2(b_2+c_3)+\lambda(-a_2 b_2-a_2 c_3-b_2 c_3+b_3 c_2 b_1 a_2+c_1 a_3)$$
$$+(a_1 b_2 c_3-a_1 b_3 c_2-b_1 a_2 c_3+b_1 c_2 a_3+c_1 a_2 b_3-c_1 a_3 b_3) = 0$$

ಅಥವಾ $\lambda^3-\lambda^2(b_2+c_3)-\lambda(-a_2 b_2-a_2 c_3-b_2 c_3+b_3 c_2 b_1 a_2+c_1 a_3)$
$$-(a_1 b_2 c_3-a_1 b_3 c_2-b_1 a_2 c_3+b_1 c_2 a_3+c_1 a_2 b_3-c_1 a_3 b_3) = 0$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಹಿಂದಿನ ಸಾಧನೆಯ ಪ್ರಕಾರ (ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆ)

$$A^3-A^2(b_2+c_3)-A(-a_2 b_2-a_2 c_3-b_2 c_3+b_3 c_2 b_1 a_2+c_1 a_3)$$
$$-(a_1 b_2 c_3-a_1 b_3 c_2-b_1 a_2 c_3+b_1 c_2 a_3+c_1 a_2 b_3-c_1 a_3 b_3) = 0$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವು, $| A - \lambda I | = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ $\lambda^3 - 6\lambda + 4 = 0$

ಅಥವಾ $(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-2) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ Aನ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳು $2, -1 \pm \sqrt{3}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ಈ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವು $|A - \lambda I| = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ $(1-\lambda)\ (-4-\lambda)\ (7-\lambda) = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ Aನ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳು 1, –4, 7 ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

3.5.2 ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ

A ಒಂದು ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಕೋಶವಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{ಮತ್ತು } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

ಆಗ ಇದರ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವು, $|(A - \lambda I)| = 0$. ಅಂದರೆ

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ $\lambda^2-\lambda\ (a_1 - b_2)\ + a_1\ b_2 - b_1\ a_2 = 0$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈಗ, ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, A ಕೋಶವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮೀಕರಣವು

$$A^2 - A\ (a_1 - b_2) + I\,(a_1\, b_2 - b_1\, a_2) = 0$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು A^{-1} ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$A + A^{-1}(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$$

ಅಥವಾ $$A^{-1} = \frac{-1}{(a_1 b_2 - b_1 a_2)} A$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ರೀತಿ, A^{-1} ಅನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅದೇ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಮೂರನೇ ದರ್ಜೆ ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ಆಗಿರಲಿ. ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, Aನ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣವು $|A - \lambda I| = 0$

ಅಂದರೆ, $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$

ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇರೆಗೆ

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು A^{-1} ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$A^2 - 6A + 7I + 2A^{-1} = 0$$

ಅಥವಾ $$A^{-1} = \frac{1}{2}[-A^2 + 6A - 7I]$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ – 3.4

1. $$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

ಈ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಗಳು ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & a & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

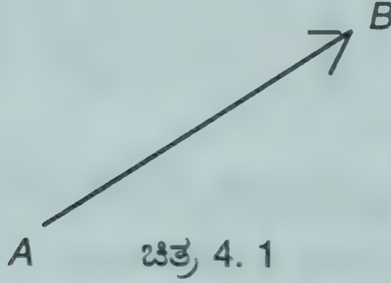
ಅಧ್ಯಾಯ – 4

ಸದಿಶಗಳು

4.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವಾಹಕಗಳು ಅಥವಾ ಸದಿಶಗಳು ರೇಖಾಗಣಿತ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ ಮುಂತಾದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ.

ಸದಿಶಗಳಿಗೆ ದಿಕ್ಕು ಮತ್ತು ಪರಿಮಾಣ ಎರಡೂ ಇವೆ. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ನಿಯತ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಉದ್ದವು ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ದಿಕ್ಕನ್ನು ಬಾಣದ ತುದಿಯಿಂದ ತೋರಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 4.1).



ಚಿತ್ರ 4. 1

A ಯು ಆದಿ ಬಿಂದು ಮತ್ತು B ಯು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಪರಿಮಾಣ

$|AB| = |\overrightarrow{a}| = AB$ ಯ ಉದ್ದ

ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸದಿಶಗಳು

(i) **ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶ:** ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣವು 0 ಆಗಿದ್ದರೆ ($|\overrightarrow{0}| = 0$) ಅದನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಬಿಂದು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು $\overrightarrow{0}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಏಕ ಸದಿಶ: ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣವು ಒಂದು ಆಗಿದ್ದರೆ ಇದನ್ನು ಏಕ ಸದಿಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $\vec{u}$ ಏಕಸದಿಶವಾಗಿದ್ದರೆ, $|\vec{u}| = 1$, ಒಂದು ಸದಿಶ $\vec{a}$ ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ಇದರ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು $\hat{a}$ (a ಕ್ಯಾಪ್)ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

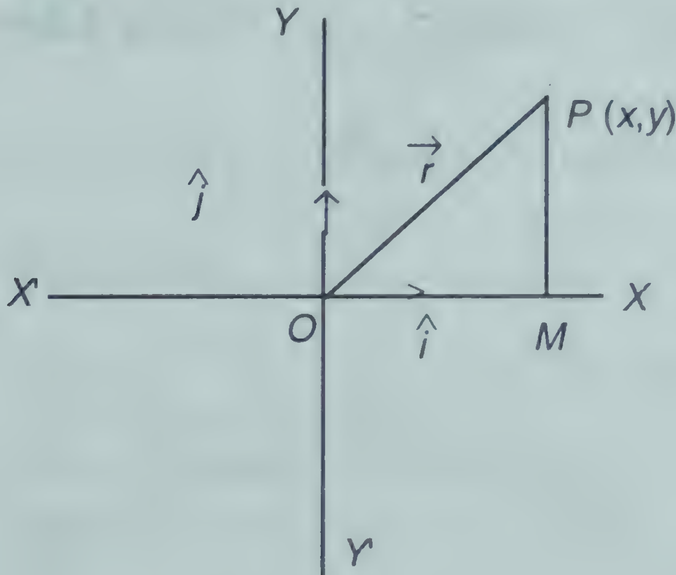
(iii) ಸಮ ಸದಿಶಗಳು: ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಕ್ಕನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸದಿಶಗಳಿಗೆ ಸಮ ಸದಿಶಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ

(iv) ಸದಿಶದ ಋಣ ಸದಿಶ (ಅಥವಾ ವಿಮುಖ ಸದಿಶ) ಒಂದು ದತ್ತ ಸದಿಶ $\vec{a}$ ಆದಾಗ, ಇದರಷ್ಟೇ ಪರಿಮಾಣ ಇರುವ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಸದಿಶವನ್ನು $\vec{a}$ ಯ ಋಣ ಸದಿಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೆವೆ. ಅದನ್ನು $-\vec{a}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(v) ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ: ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು Pಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ $\vec{op}$ ಸದಿಶವನ್ನು (0 ಮೂಲಬಿಂದು) ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

4.2 (x,y) ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ

$\hat{i}$ ಮತ್ತು $\hat{j}$ ಇವು ಎರಡು OX ಮತ್ತು OY ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(x,y)$ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $\vec{OP}$ ಯು P ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 4.2).



ಚಿತ್ರ 4.2

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 4.2 ರಲ್ಲಿ, PMನ್ನು x –ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ

$$\therefore\ OM = x$$

x – ಅಕ್ಷದ ದಿಕ್ಕಿಗೆ $\hat{i}$ ಯು ಏಕ ಸದಿಶವಾದುದರಿಂದ

$\overrightarrow{OM} = x\hat{i}$

y – ಅಕ್ಷದ ದಿಕ್ಕಿಗೆ $\hat{j}$ ಯು ಏಕ ಸದಿಶವಾದುದರಿಂದ

$\overrightarrow{MP} = y\hat{j}$

ಸದಿಶದ ಸಂಕಲನ ತ್ರಿಭುಜ ನಿಯಮದಿಂದ

ಈಗ, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = x\hat{i} + y\hat{j}$

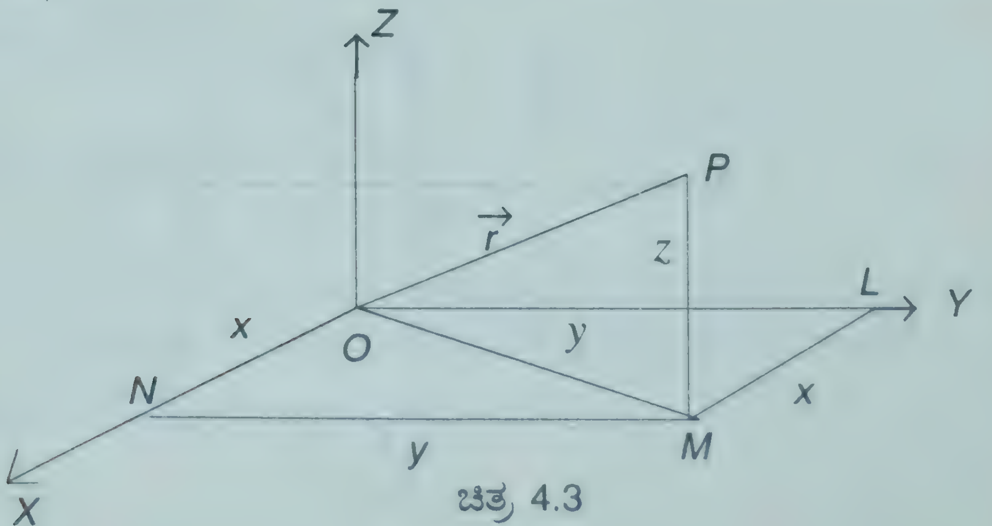
$\therefore \vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$|\vec{r}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{OM^2 + MP^2}$

$= \sqrt{x^2+y^2}$

ಆದ್ದರಿಂದ $P(x,y)$ಯು ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$.

ಇದನ್ನು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮ (x,y) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ x, y ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಆದುದರಿಂದ ಒಂದು ಸದಿಶವನ್ನು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 4.3

P ಯು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರುವಾಗ ಮೂರು – ಆಯಾಮಗಳ ವ್ಯೋಮದಲ್ಲಿ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ಈ ಮೂರು ಏಕಸದಿಶಗಳು OX, OY ಮತ್ತು OZ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. OX, OY ಮತ್ತು OZ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಚಿತ್ರ 4.3 ರಲ್ಲಿ PM ನ್ನು XOY ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. MN ನ್ನು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ML ನ್ನು y–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $ON = ML = x$, $NM = OL = y$ ಮತ್ತು $MP = z$

ನಿಯೋಜಿತ ತ್ರಯ (x, y, z) ನಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು P ಬಿಂದುವಿನ x– ನಿರ್ದೇಶಕ, y–ನಿರ್ದೇಶಕ, ಮತ್ತು z–ನಿರ್ದೇಶಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

$$\therefore \overrightarrow{ON} = x\hat{i}, \quad NM = y\hat{j}$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} \text{ [}OMN\text{ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ]}$$

$$= x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \text{ [}OMP\text{ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ]}$$

$$\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

ಇದರ ಪರಿಮಾಣ, $|\overrightarrow{OP}| = |x\hat{i} + y\hat{i} + \hat{k}|$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

P ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು (x, y, z) ಮತ್ತು ಇದರ ಪರಿಮಾಣ $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

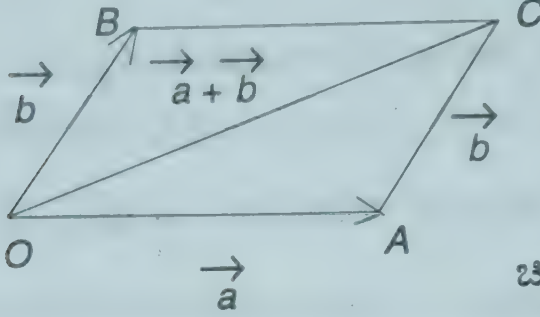
(1) ಸದಿಶಗಳ ಸಂಕಲನ ಗುಣಗಳು:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\quad$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ಆದರೆ

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2+b_2, a_3 + b_3)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆಗಳು : $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಅಕ್ಕ ಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.4).

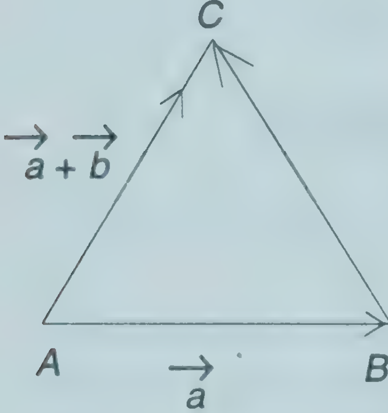
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OB} = \vec{b}.$ ಆಗ $\vec{a} + \vec{b}$ ಯು ಸದಿಶ $\overrightarrow{OC}$ ಆಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 4.4

ಸದಿಶ ಸಂಕಲನದ ತ್ರಿಕೋನ ನಿಯಮ:

ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾದ $\overrightarrow{AB}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{BC}$ ಗಳು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಎಂಬ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ $\overrightarrow{AC}$ ಯು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ $\vec{a} + \vec{b}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 4.5).



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ಚಿತ್ರ 4.5

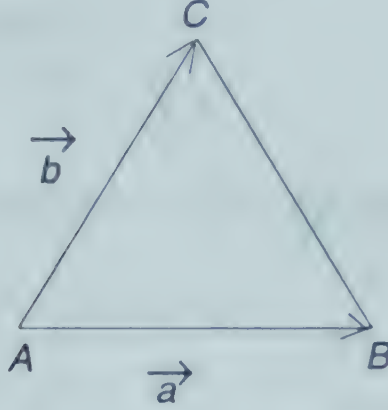
ಇದೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸದಿಶಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಸದಿಶದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುವು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸದಿಶದ ಮೊದಲನೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಬೇಕು

ಅಂದರೆ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

(2) ಸದಿಶಗಳ ವ್ಯವಕಲನ:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ ಮತ್ತು } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$$



ಚಿತ್ರ 4.6

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ (ಚಿತ್ರ 4.6)

$\vec{AB} = \vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{AC} = \vec{b}$ ಆದಾಗ

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

ಅಂದರೆ, $\vec{a} = \vec{b} + \vec{CB}$

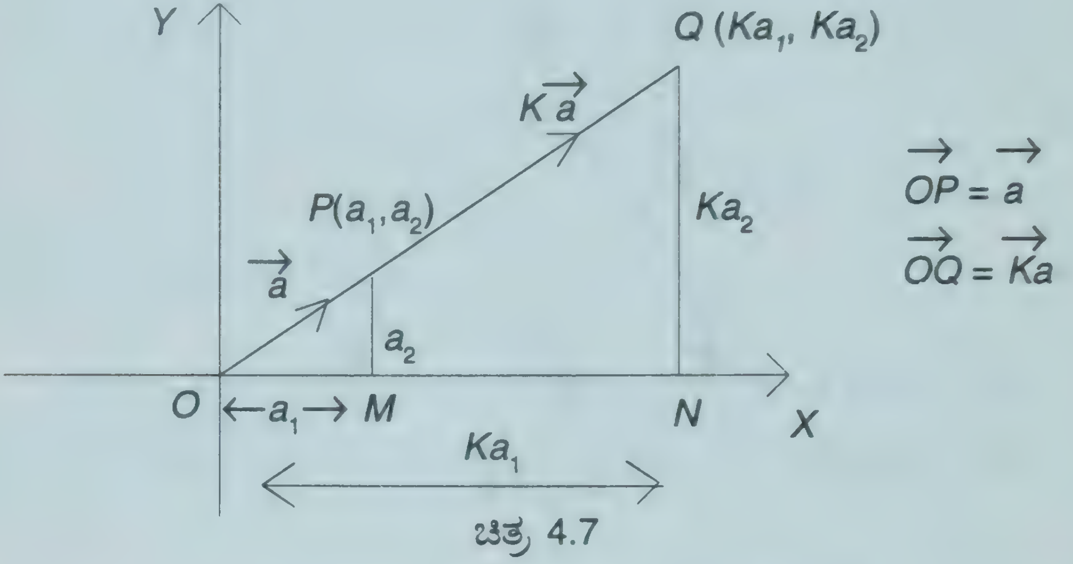
ಅಥವಾ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{CB}$

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ *ABC* ಯಲ್ಲಿ

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

(3) ಒಂದು ಅದಿಶದಿಂದ ಸದಿಶದ ಗುಣಾಕಾರ

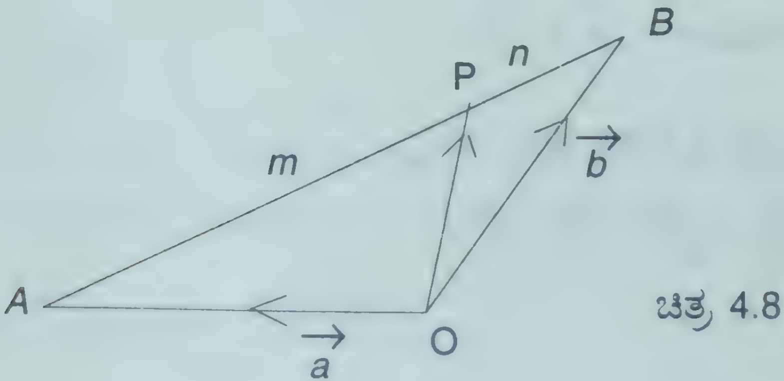
$\vec{a} = (a_1, a_2)$ ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿದ್ದು K ಯು ಒಂದು ಅದಿಶವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\vec{Ka} = (Ka_1, Ka_2)$ ಸದಿಶವು $\vec{a}$ ಸದಿಶದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದ್ದು ಇದರ ಪರಿಮಾಣವು $\vec{a}$ ಯು ಪರಿಮಾಣದ K ಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 4.7).



ಚಿತ್ರ 4.7

4.3 ವಿಭಜನ ಸೂತ್ರ

A ಮತ್ತು B ಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಆಗಿದ್ದರೆ P ಬಿಂದುವು $\overrightarrow{AB}$ ಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ Pಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ (ಚಿತ್ರ 4.8).



ಚಿತ್ರ 4.8

$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\therefore n\overrightarrow{AP} = m\ \overrightarrow{PB}$

ಅಥವಾ $n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$

ಅಥವಾ $(m+n)\ \overrightarrow{OP} = n\ \overrightarrow{OA} + m\ \overrightarrow{OB}$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

ಮಧ್ಯಬಿಂದು: $m = n = 1$ ಆದರೆ P ಯು $\overrightarrow{AB}$ ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಅವುಗಳ ಶೃಂಗಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ (ಶೃಂಗದಿಂದ ಆರಂಭಗೊಂಡ) ಸದಿಶಗಳ ಮೊತ್ತ ಶೂನ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ABC ಎಂಬ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.9)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ಆಗಿರಲಿ.

(ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂಲಬಿಂದು O ತೋರಿಸಿಲ್ಲ)

D ಯು BCಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\quad \therefore \overrightarrow{OD} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

E ಯು AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\quad \therefore \overrightarrow{OE} = \dfrac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$

F ಯು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\quad \therefore \overrightarrow{OF} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

ಈಗ, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}}{2}$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB}$$

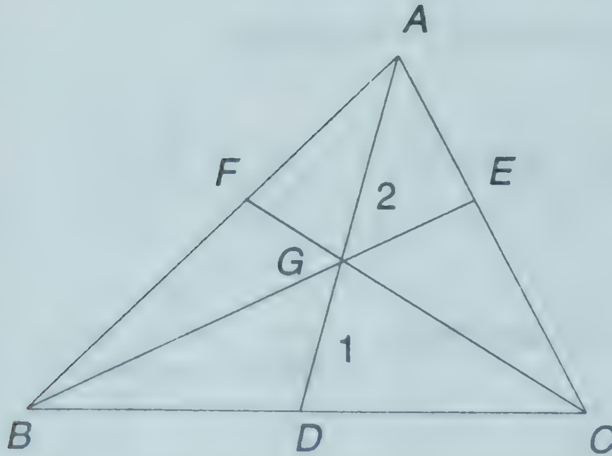
$$= \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} - \vec{b} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}}{2}$$

ಮತ್ತು $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC}$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{c} = \frac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯರೇಖಾ ಸದಿಶಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{2} = \vec{0}$$



ಚಿತ್ರ 4.9

2. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. *ABC* ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 4.9).

D ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

E ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

F ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

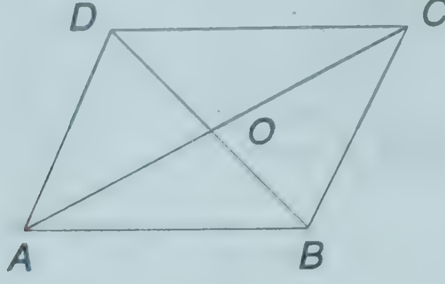
ಈಗ *A* ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ $\vec{a}$ ಮತ್ತು *D* ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

G ಬಿಂದುವು *AD*ಯನ್ನು 2:1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$G \text{ ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು } \frac{\dfrac{2(\vec{b}+\vec{c})}{2} + 1\vec{a}}{2+1} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

ಈಗ, *G* ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶದ ಸಮಾಂಗತೆಯಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದುಬರುವುದೇನೆಂದರೆ, *G* ಯು *BE* ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $\overrightarrow{CF}$ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿರುವುವು. ಇದರ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ ಆಗಿದೆ.

3. ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ದ್ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಹಾಗೂ ಇದರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 4.10

(i) *ABCD* ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ (ಚಿತ್ರ 4.10). ನಾವು *AC*ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮತ್ತು *BD*ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಒಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ ಎಂದಿರಲಿ.

*ABCD*ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

ಅಥವಾ $\vec{b} - \vec{a} = \vec{d} - \vec{c}$

ಅಥವಾ $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$

$$\therefore \quad \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

ಅಂದರೆ *BD* ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ≡ *AC* ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

(ii) ವಿಲೋಮ ಫಲಿತಾಂಶ :

AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ≡ *BD* ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ.

ABCD ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, AC ಮತ್ತು BD ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$$

ಅಥವಾ $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

ಅಥವಾ $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$

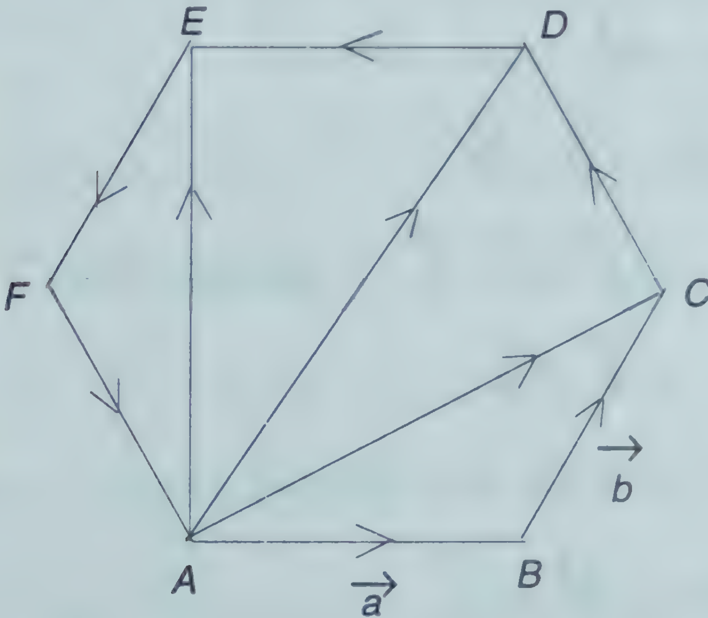
ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$

ಅಥವಾ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\therefore AB \parallel DC, AB = DC$

ಹಾಗೆಯೇ, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $ABCD$ ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

4. $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು $ABCDEF$ ಸಮಭುಜ ಷಟ್ಕೋನದ ಅಕ್ಕ ಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{CE}$ ಗಳನ್ನು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 4.11).



ಚಿತ್ರ 4.11

$\vec{AB} = \vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{BC} = \vec{b}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ ..... (1)

ಈಗ, $AD \parallel BC$ ಮತ್ತು $AD = 2\,BC$

$\therefore \vec{AD} = \vec{2b}$ .... (2)

ಈಗ, $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$

ಅಂದರೆ, $\vec{2b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{CD}$ [(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ]

ಅಥವಾ $\vec{b} - \vec{a} = \vec{CD}$ .... (3)

$FA \parallel DC$ ಮತ್ತು $FA = DC$

$\therefore \vec{FA} = \vec{DC}$ ಅಥವಾ $\vec{FA} = -\vec{CD}$

$\therefore \vec{FA} = \vec{a} - \vec{b}$ [(3)ರಿಂದ)]

$DE \parallel BA$ ಮತ್ತು $DE = BA$

$\therefore \vec{DE} = -\vec{AB}$ ಅಥವಾ $\vec{DE} = -\vec{a}$ .... (4)

ಈಗ, $\vec{CE} = \vec{CD} + \vec{DE}$

$= \vec{b} - \vec{a} - \vec{a}$ [(3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ]

$= \vec{b} - \vec{2a}$

ಹಾಗೆಯೇ $EF \parallel CB$ ಮತ್ತು $EF = CB$

$\therefore \vec{EF} = -\vec{BC} = \vec{-b}$

$\therefore \vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$

$= \vec{2b} - \vec{a}$ [(2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ].

5. A, B, C, D ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{2a} + \vec{3b}$ ಮತ್ತು $\vec{a} - \vec{2b}$ ಗಳಾಗಿವೆ. $\vec{AC}, \vec{DB}, \vec{BC}$ ಮತ್ತು $\vec{CA}$ ಸದಿಶಗಳನ್ನು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈಗ O ಎಂಬುದು ಮೂಲಬಿಂದುವಾದರೆ, ಸ್ಥಾನಸದಿಶಗಳು

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{2a} + \vec{3b}$ ಮತ್ತು $\vec{OD} = \vec{a} - \vec{2b}$

$\therefore \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{2a} + \vec{3b} - \vec{a} = \vec{a} + \vec{3b}$

$\vec{DB} = \vec{OB} - \vec{OD} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{2b} = \vec{3b} - \vec{a}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{2a} + \vec{3b} - \vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b})$

ಮತ್ತು $\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{a} - \vec{2a} - \vec{3b} = -(\vec{a} + \vec{3b})$

4.4 ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಸದಿಶವಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆ :

$\vec{a} = (1, 2, -3)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (3, -1, 2)$ ಆದರೆ

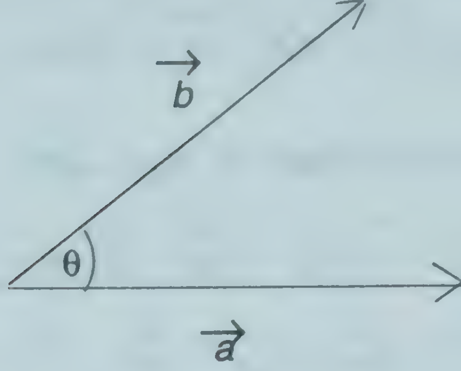
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1.3 + 2(-1) + (-3)(2) = -5.$

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಥ

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸದಿಶಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.12).

ಆಗ, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಯುನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\theta$$



ಚಿತ್ರ 4.12

ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ :

(i) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಯು ಸದಿಶವಲ್ಲ

(ii) θ ಕೋನವು ಲಘು ಅಥವಾ ಅಧಿಕವಾದಾಗ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಯು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

(iii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ಅಂದರೆ, *ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ*

(iv) $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಯು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
ಏಕೆಂದರೆ, $\cos 90° = 0$

(v) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ಆದಾಗ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|$
ಏಕೆಂದರೆ $\cos 0° = 1$

(vi) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$

(vii) ಏಕಸದಿಶಗಳ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಹೀಗಿರುತ್ತವೆ :

$\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}|^2 = 1$, $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ ಮತ್ತು $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

$\hat{i}, \hat{j}$ ಮತ್ತು $\hat{k}$ ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \qquad \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$

$\hat{i} \cdot \hat{k} = 0 \qquad \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

$\hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \qquad \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$

(viii) $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ಮತ್ತು $b = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1\hat{i}. (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + a_2\hat{j}. (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) +$$

$$a_3\hat{k} (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1 (\hat{i}. \hat{i}.) + a_1 b_2 (\hat{i}. \hat{j}) + a_1 b_3 (\hat{i}. \hat{k})$$

$$+a_2 b_1 (\hat{j} . \hat{i}) + a_2 b_2 (\hat{j} . \hat{j}) + a_2 b_3 (\hat{j} . \hat{k})$$

$$+a_3 b_1 (\hat{k}. \hat{i}) + a_3 b_2 (\hat{k} . \hat{j}) + a_3 b_3 (\hat{k} . \hat{k})$$

$$= a_1 b_1(1) + a_1 b_2(0) + a_1 b_3(0) + a_2 b_1(0) + a_2 b_2(1)$$

$$+ a_2 b_3(0) + a_3 b_1(0) + a_3 b_2 (0) + a_3 b_3(1)$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum a_i b_i, i = 1, 2, 3$$

4.5 ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ಅಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j} (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \Sigma\, \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ. ಅಂದರೆ

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$ ಏಕೆಂದರೆ

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

ಉದಾಹರಣೆ: $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

ಮತ್ತು $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(15 - 24) - \hat{j}(10 + 18) + \hat{k}(-8 - 9)$$

$$= 9\hat{i} - 28\hat{j} - 17\hat{k}$$

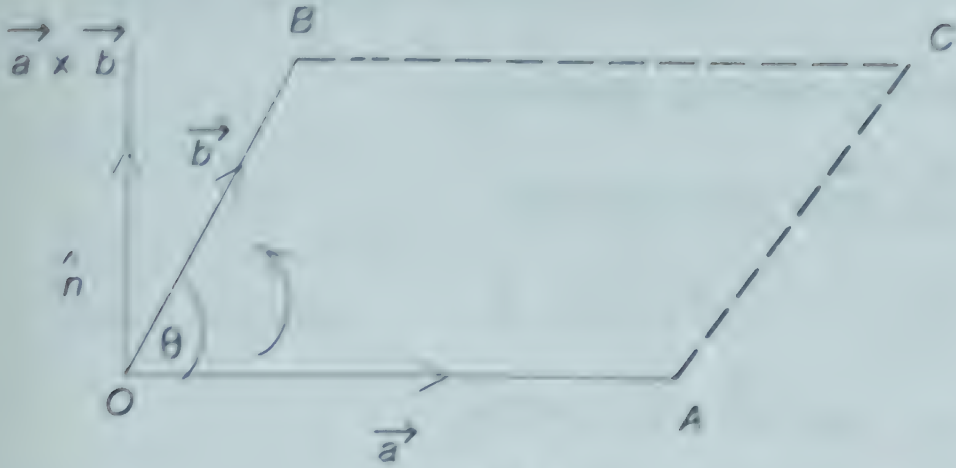
$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(24-15) - \hat{j}(-18-10) + \hat{k}(9+8)$$

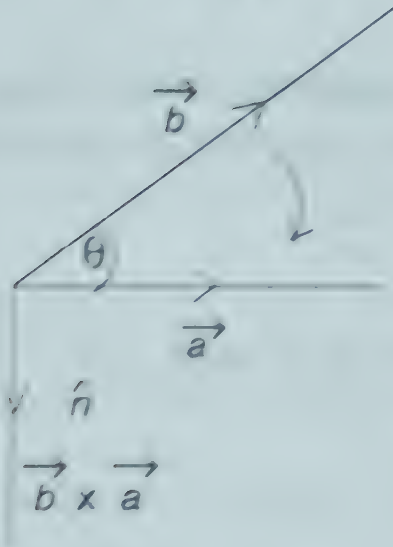
$$= 9\hat{i} + 28\hat{j} + 17\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಥ:



ಚಿತ್ರ 4.13



ಚಿತ್ರ 4.14

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಎರಡು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸದಿಶಗಳು ಹಾಗೂ θ ವು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಆಗಿರಲಿ. $\hat{n}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಏಕ ಸದಿಶ. ಇದು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ ಬಲತಿರುಪು ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಆಗಿದೆ. ಆಗ $\vec{a} \times \vec{b}$ ಯನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯಿಸುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರಗಳು 4.13, 4.14).

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{n}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\ b \sin\theta \quad (\text{ಏಕೆಂದರೆ } |\hat{n}| = 1)$$

$= OA \, . \, OB \, . \sin\theta$

$= OACB$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ :

(i) $\vec{a} \times \vec{b}$ ಯು ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿದೆ.

(ii) $\vec{b} \times \vec{a} = |\vec{b}| \; |\vec{a}| \sin(-\hat{n})$

$= |\vec{a}| \; |\vec{b}| \; \sin\theta \, \hat{n}$

ಅಂದರೆ, $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

(iii) ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ. $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$

(iv) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ಆದರೆ $\theta = 0 \;\therefore \sin\theta = 0$

$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = 0$

(v) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(vi) $\vec{a} \perp^r \vec{b}$ ಆದಾಗ $\theta = 90°, \sin\theta = 1$

$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = a \; b \; \hat{n}$

ಇಲ್ಲಿ, $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

(vii) ಏಕ ಸದಿಶಗಳಾದ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ಗಳ ಸದಿಶಗಳಾದ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

$\hat{i} \times \hat{i} = 0 \qquad \hat{j} \times \hat{j} = 0 \qquad \hat{k} \times \hat{k} = 0$

$\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}| |\hat{j}| \sin 90° \, \hat{k}$

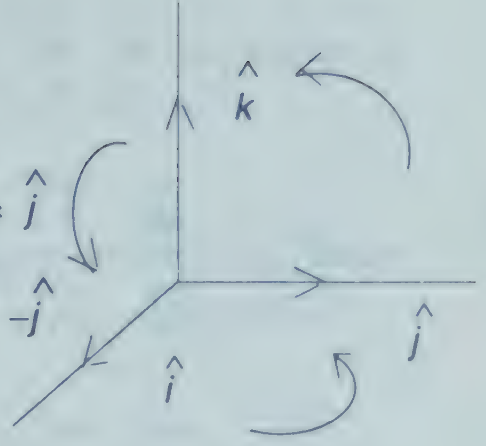
$= 1 . 1 . 1 \hat{k}$

$\therefore \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

ಹೀಗೆಯೇ, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ ಮತ್ತು $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

(ಚಿತ್ರ 4.15 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 4.15

(viii) $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ ಮತ್ತು, ಆಗ $\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \times (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$$

$$= a_1 \hat{i} \times (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}) + a_2 \hat{j} \times (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$$

$$+ a_3 \hat{k} \times (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$$

$$= a_1 b_1 (\hat{i} \times \hat{i}) + a_1 b_2 (\hat{i} \times \hat{j}) + a_1 b_3 (\hat{i} \times \hat{k})$$

$$+ a_2 b (\hat{j} \times \hat{i}) + a_2 b_2 (\hat{j} \times \hat{j}) + a_2 b_3 (\hat{j} \times \hat{k})$$

$$+ a_3 b_1 (\hat{k} \times \hat{i}) + a_3 b_2 (\hat{k} \times \hat{j}) + a_3 b_3 (\hat{k} \times \hat{k})$$

$$= a_1 b_1 (\vec{0}) + a_1 b_2 (\hat{k}) + a_1 b_3 (-\hat{j})$$

$$+ a_2 b_1 (-\hat{k}) + \vec{0}$$

$$+ a_2 b_3 (\hat{i}) + a_3 b_1 (\hat{j}) + a_3 b_2 (-\hat{i}) + 0$$

$$= \hat{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j} (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(ix) $$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$$ ಮತ್ತು $$\sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \times \vec{b}}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ಆದಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯರಿ :

(i) $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (ii) $\cos\theta$ (iii) $\hat{a} + \hat{b}$

(i) $$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{j}).\ (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$$

$$= (2)\ (3) + (3)(-4) + (-6)(5)$$

$$= -36$$

(ii) $$\cos\ \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}.}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-36}{7\sqrt{50}} = \frac{-36}{35\sqrt{2}} = -\frac{18\sqrt{2}}{35}$$

(iii) $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ $\hat{b} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$\therefore \hat{a} = \dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{4+9+36}}$ ಮತ್ತು $\hat{b} = \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{32+42+52}}$

$\hat{a} = \dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7}$ ಮತ್ತು $\hat{b} = \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{2}}$

$\hat{a} + \hat{b} = \dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7} + \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{2}}$

2. $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 6 + 0 = 0$

$\therefore \vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

3. $\vec{a} = 2\lambda\hat{i} + \lambda\hat{j} - 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \lambda\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಸದಿಶಗಳು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ λದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ಅಂದರೆ, $\vec{a} \cdot \vec{b}, = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$

ಅಥವಾ $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

ಅಥವಾ $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$

ಅಥವಾ $\lambda = 2, \quad \lambda = -1$

4. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ಆದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\vec{a} \times \vec{b}$ (ii) $\sin\theta$ (iii) $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸದಿಶ

ಈಗ, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-1-3) - \hat{j}(-1-2) + \hat{k}(3-2)$

$= 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

(ii) $\sin\theta = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \dfrac{\sqrt{16+9+1}}{\sqrt{3}\ \sqrt{14}} = \dfrac{26}{\sqrt{42}} = \dfrac{13}{\sqrt{21}}$

(iii) $\hat{n} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \dfrac{-4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{16+9+1}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{26}}\ (-4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})\ \sqrt{26}$

ಸದಿಶವು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

5. *A, B, C, D* ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು

$\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 3\hat{j}$, $3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{k} - \hat{j}$ ಆದರೆ

AB II' *CD* ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, O ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ

$$\vec{OA} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{OB} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\vec{OC} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$ ಮತ್ತು $$\vec{OD} = \hat{k} - \hat{j}$$

ಈಗ, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = -3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore \vec{AB} \times \vec{CD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(6-6) - \hat{j}(3-3) + \hat{k}(-6+6)$$

$$= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0) = 0$$

$$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{CD}$$

6. $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8\hat{i} + 8\hat{j} + 8\hat{k}$$

$\therefore$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{8}\,(1+1+1) = 8\sqrt{3}$

7. $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = -5\hat{i} + 7\hat{j}$ ಇವೆರಡು ಸದಿಶಗಳು ಎರಡು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಕ್ಕ ಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ½ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

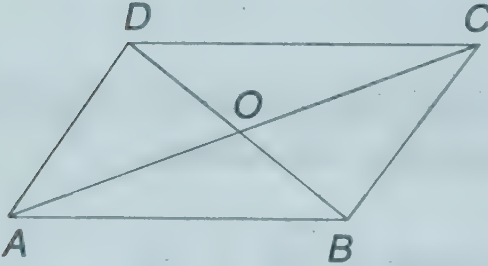
$= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 41\hat{k}$$

ಅಥವಾ $|a \times b| = 41$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{41}{2}$

8. $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ಇವು ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
ABCD ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 4.16

$\vec{AC} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

ಮತ್ತು $\vec{BD} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.16).

ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4\ \Delta^{le} \times$ *COD* ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 4 \times \frac{1}{2}\ \vec{OC} \times \vec{OD}$

$= 2\ (\frac{1}{2}\ \vec{AC}) \times (\frac{1}{2}\ \vec{BD})$

$= \frac{1}{2}\ \vec{AC} \times \vec{BD}$

ಈಗ, $\vec{AC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

$= -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$

$\therefore$ $ABCD$ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}\sqrt{4+196+100}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{300}$

$= 5\sqrt{3}$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

9. $\hat{a}$ ಮತ್ತು $\hat{b}$ ಎರಡು ಏಕ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದು θ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ

$\sin(\theta/2) = \frac{1}{2}(\hat{a} - \hat{b})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\vec{OA} = \hat{a}$ ಮತ್ತು $\vec{OB} = \hat{b}$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \vec{BA} = \hat{a} - \hat{b}$

$|\vec{BA}| = |BA| = |\hat{a} - \hat{b}|$

$(BA)^2 = (\hat{a} - \hat{b}).(\hat{a} - \hat{b}) = a^2 + b^2 - 2\hat{a} . \hat{b}$

$= 1+1 - 2|\hat{a}||\hat{b}| \cos\theta$

ಅಂದರೆ, $BA^2 = 2(1-\cos\theta) = 2.2 \sin^2(\theta/2)$

$\therefore BA = 2\sin(\theta/2)$

ಅಥವಾ $\frac{1}{2} BA = \sin(\theta/2)$

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}| = \sin(\theta/2)$

10) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$

ಅಥವಾ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

ಅಂದರೆ, $a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

ಅಥವಾ $4\,\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ಅಥವಾ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\therefore$ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಲಂಬವಾಗಿವೆ

4.6 ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ (ಸ್ಕೇಲಾರ್ ಟ್ರಿಪಲ್ ಪ್ರಾಡಕ್ಟ್)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ಆ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

ಆದಾಗ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(b_2 c_3 - b_3 c_2) - \hat{j}(b_1 c_3 - b_3 c_1) + \hat{k}(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$\therefore$ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$$= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot \hat{i}(b_2 c_3 - b_3 c_2) - \hat{j}(b_1 c_3 - b_3 c_1)$$

$$+ \hat{k}(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\therefore \vec{a}\ (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ

(i) $\vec{a}\ .\ (\vec{b} \times \vec{c})$ ಯು ಸದಿಶವಲ್ಲ; ಇದೊಂದು ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ

(ii) ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಈ ಸದಿಶಗಳ ಅಧಿಕ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\vec{a}.\ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.\ (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}.\ (\vec{a} \times \vec{b})$$

ಅಥವಾ $[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}] = [\vec{b}\ \ \vec{c}\ \ \vec{a}] = [\vec{c}\ \ \vec{a}\ \ \vec{b}]$

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು:

$$\vec{a}\ .\ \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ

$$= + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ

$$\therefore \vec{a}\ .\ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\ .\ (\vec{c} \times \vec{a})$$

ಹೀಗೆಯೇ $\vec{b}\ .\ (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}\ .\ (\vec{a} \times \vec{b})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \vec{a}\ .\ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\ .\ (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}\ .\ (\vec{a} \times \vec{b})$$

ಅಥವಾ $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

(iii) 3 ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b}] = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{b}]$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

(ಎರಡು ಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದು)

(iv) ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥ

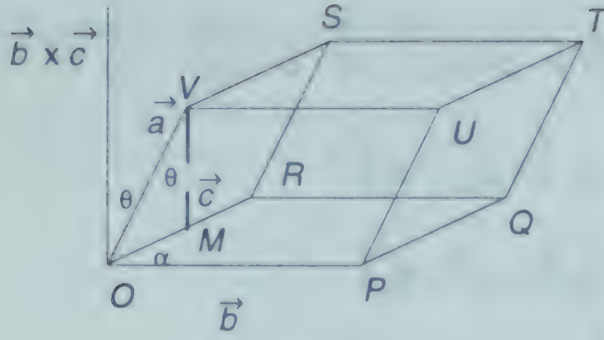
$\vec{a}$, $\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ (ಆರು) ಮುಖಿಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ (ಪ್ಯಾರಲಲೋಪೈಪೆಡ್) , ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಡುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ಯು ಇದರ **ಘನಫಲವನ್ನು** ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 4.17) *O P Q R S. T U V* ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ (ಆರು) ಮುಖಿಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳು $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ಯಾಗಿವೆ.

$OP = b$, $OR = c$ ಮತ್ತು $OV = a$ (ಚಿತ್ರ 4.17).

$\vec{b} \times \vec{c}$ ಯು *OPQR* ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

$\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ α ಎಂದಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, $POR = \alpha$

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b} \times \vec{c}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಎಂದಿರಲಿ.



VM ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಮತಲ *OPQR*ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರ 4.17

$$\therefore\ \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta$$

$$= (OV\cos\theta)\ |\vec{b}|\ |\vec{c}|\ \sin\alpha$$

$$= (VM)\ [(OP)\ (OR)\sin\alpha]$$

= (ಘನಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ) (*OPQR*ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

ಏಕೆಂದರೆ, $\cos\theta = VM / OV$

$VM = OV\cos\theta$ = ಎತ್ತರ

$\therefore\ \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = OPQRSTUV$ ಯ ಘನಫಲ. ಇಲ್ಲಿ, *OPQRSTUV* ಯು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(v) **$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ ಘನಫಲ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು.**

$$\therefore\ \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ 3 ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ ವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು.

4.7 ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ (ವೆಕ್ಟರ್ ಟ್ರಿಪಲ್ ಪ್ರಾಡಕ್ಟ್)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು 3 ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ಆ 3 ಸದಿಶಗಳ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಸದಿಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$

ಸಾಧನೆ : $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

$\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

ಮತ್ತು $\vec{c} = c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(b_2 c_3 - b_3 c_2) - \hat{j}(b_1 c_3 - b_3 c_1) + \hat{k}(b_1 c_2 - b_2 c_1)$

$\therefore \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix}$

$= \Sigma\, [a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]\, \hat{i}$

$= \Sigma\, [a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3]\, \hat{i}$

[$a_1 b_1 c_1$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಕಳೆದಾಗ]

$= \Sigma\, [a_1 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_2 + a_3 b_1 c_3 - (a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_1 + a_3 b_3 c_1)]\, \hat{i}$

$= \Sigma\, [(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\, b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\, c_1]\, \hat{i}$

$= (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \Sigma\, b_1 \hat{i} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, c_1 \hat{i}$

$= (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿಸೋಣ

(i) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ಯು ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿದೆ

(ii) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಸದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= -[(\vec{c} \cdot \vec{b})\ \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\ \vec{b}]$$

$$= (\vec{c} \cdot \vec{a})\ \vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\ \vec{a}$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\ \vec{a}$$

$$= \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\therefore\ a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k},\ \vec{b} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ಮತ್ತು $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\ \vec{c}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -9 + 4 - 8 = -13$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 18 - 8 - 4 = 6$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} = -13(6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= -78\hat{i} - 52\hat{j} + 26\hat{k}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\ \vec{c} = 6(-3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}) = -18\hat{i} - 12\hat{j} - 24\hat{k}$$

$$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\ \vec{c} = -60\hat{i} - 40\hat{j} + 60\hat{k}$$

$$= -20(3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

ಹಾಗೆಯೇ, $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\ \vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = -13$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = -18 - 8 + 8 = -18$

$(\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} = -13\,(6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$

$= 78\hat{i} - 52\hat{j} + 26\hat{k}$

$(\vec{b} \cdot \vec{c})\ \vec{a} = -18(3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$= -54\hat{i} + 36\hat{j} - 36\hat{k}$

$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\ \vec{a} = -24\hat{i} - 98\hat{j} + 62\hat{k}$

2. $[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$LHS \equiv \vec{a} \times \vec{b} \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})]$

$\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore LHS = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \{p \times (\vec{c} \times \vec{a})\}$

$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \{(\vec{p} \cdot \vec{a})\ \vec{c} - (\vec{p} \cdot \vec{c})\ \vec{a}\}$

$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \{(\vec{a} \cdot \vec{p})\ \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{p})\ \vec{a}\}$

$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\ \{\vec{c} - \vec{c}\}\ (\vec{b} \times \vec{c})]\ \vec{a}$

$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \{[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]\ \vec{c} - [\vec{c} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]\ \vec{a}\}$

$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \{[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]\ \vec{c} - (0) \cdot \vec{a}\}$

$= \{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\}\ [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$

$= [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]\ [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$

$= [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2$

3. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ಆದರೆ

$\vec{b} = \vec{0}$ ಅಥವಾ $\vec{c} \parallel \vec{a}$

ಈಗ, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$

ಅಥವಾ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$

ಅಥವಾ $(\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} = \vec{0}$

ಅಂದರೆ, $\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$

$\therefore \vec{b} = \vec{0}$ ಅಥವಾ $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$

ಅಂದರೆ, $\vec{b} = \vec{0}$ ಅಥವಾ $\vec{c} \parallel \vec{a}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳು $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಘನಫಲ} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1)+3(2+3)+4(-1-6) = -7$$

ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

ಘನ ಫಲ = 7 ಘನಮಾನಗಳು.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\hat{i}+\hat{j}-\hat{k},\ -\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k},\ -\hat{i}-9\hat{j}+7\hat{k}$

ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಾದ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರಬೇಕಾದರೆ

$\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 4 \\ -1 & -9 & 7 \end{vmatrix} = 1(-35+36)-1(-7+4) - 1(9-5) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸದಿಶಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

3. $3\hat{i}+9\hat{j}-2\hat{k},\ \hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k},\ 2\hat{i}+\lambda\hat{j}+10\hat{k}$ ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ λದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೂರು ಸದಿಶಗಳಾದ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ,

$\vec{a}.\ (\vec{b}\times\vec{c}) = 0.$

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ 3 ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & \lambda & 10 \end{vmatrix} = 0$$

ಅಂದರೆ, $3(20-5\lambda) - 9(10-10)-2(\lambda-4) = 0$

ಅಥವಾ $60 - 15\lambda - 2\lambda + 8 = 0$

ಅಥವಾ $17\lambda = 68$

ಅಥವಾ $\lambda = 4.$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\vec{A}\ (4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k})$

$\overrightarrow{B}$ $(2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})$

$\overrightarrow{C}$ $(3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$

$\overrightarrow{D}$ $(5\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k})$

ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಸದಿಶಗಳಾದ

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AD}$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore\ [\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] = 0$

ಈಗ, $\overrightarrow{AB} = -2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = -\hat{i} - 3\hat{j} - 8\hat{k}$

$\overrightarrow{AD} = \hat{i} - 7\hat{k}$

$$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -2(21-0) + 4(.7 + 8) - 6(0 + 3)$$

$$= -42 + 60 - 18 = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, A, B, C, D ಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

5. $[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\quad \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\quad \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}] = 2[\overrightarrow{a}\quad \overrightarrow{b}\quad \overrightarrow{c}]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\quad \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\quad \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) . \{(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \times (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a})\}$

$= (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}). \{\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}\}$

ಏಕೆಂದರೆ $\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$$

$$+ \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$= [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}] + [\vec{b} \; \vec{b} \; \vec{c}] + [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{a}] + [\vec{b} \; \vec{b} \; \vec{a}]$$

$$+ [\vec{a} \; \vec{c} \; \vec{a}] + [\vec{b} \; \vec{c} \; \vec{a}]$$

$= [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}] + [\vec{b} \; \vec{c} \; \vec{a}]$ [ಏಕೆಂದರೆ ಉಳಿದ ಪದಗಳು = 0]

$$= [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}] - [\vec{a} \; \vec{c} \; \vec{b}]$$

$$[\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}] + [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]$$

$$= 2 \left[\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c} \right]$$

6. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

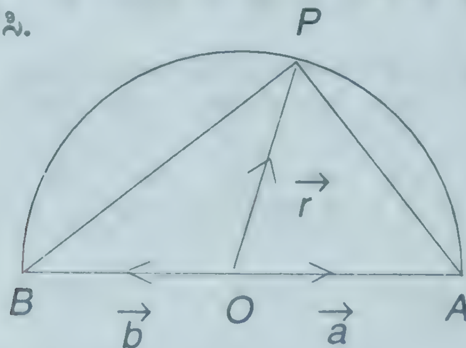
$$\text{LHS} \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} + (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

$$+ (\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

$$+ (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} = 0 = \text{RHS}$$

7. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 4.17

P ಯು ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ABಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿದ್ದು O ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.17)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ ಎಂದಿರಲಿ

ಈಗ, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \vec{a}$

ಮತ್ತು $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \vec{r} - \vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{BP} = (\vec{r} - \vec{a}) . (\vec{r} - \vec{b})$

$= \vec{r} . \vec{r} - \vec{r} . \vec{b} - \vec{a} . \vec{r} + \vec{a} . \vec{b}$

$= |\vec{r}|^2 + \vec{r} . \vec{a} - \vec{a} . \vec{r} - \vec{a} . \vec{a}$ (ಏಕೆಂದರೆ $-\vec{b} = \vec{a}$)

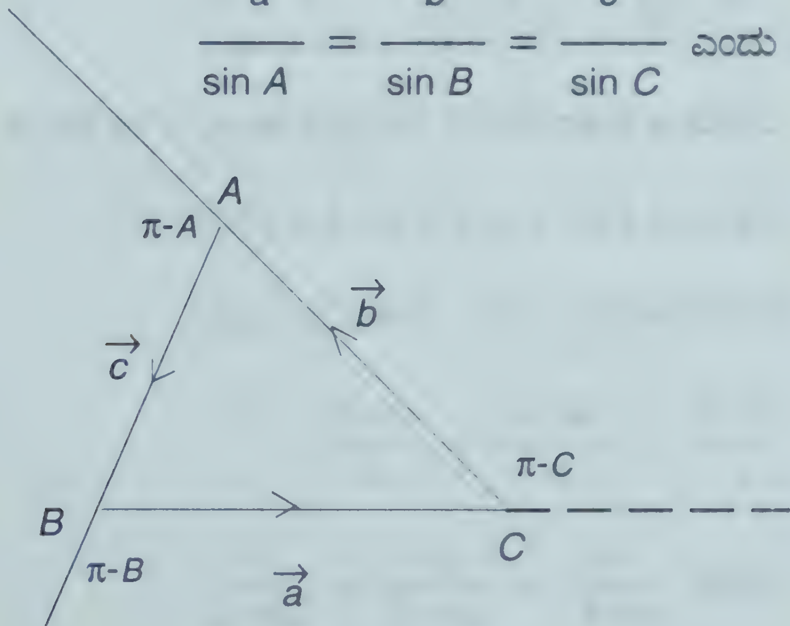
$= |\vec{r}|^2 - |\vec{a}|^2$

$\therefore \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{BP} = 0$ (ಏಕೆಂದರೆ $r = a$, ತ್ರಿಜ್ಯ)

ಅಂದರೆ, AP ಮತ್ತು BP ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಅಥವಾ $\angle APB = 90°$.

8. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೈನ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇΔದ ABC ಯಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 4.18

ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$ ಎಂದಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.18).

ಆಗ, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{0}$$

ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} = 0$

ಅಥವಾ $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} = 0$ (ಏಕೆಂದರೆ $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$)

ಅಥವಾ $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$

ಅಥವಾ $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$ ....(1)

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $\overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{0}$

ಅಥವಾ $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$

ಅಥವಾ $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ......(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}|$$

ಅಥವಾ $a\, b \sin (\pi - C) = bc \sin (\pi - A) = ca \sin (\pi - B)$

ಅಥವಾ $a\, b \sin C = b\, c \sin A = c\, a \sin B$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $a\, b\, c$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

9. ಸದಿಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯಲ್ಲಿ $a^2 = b^2+c^2 - 2bc \cos A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

ಅಥವಾ $\overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$$\therefore |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

ಅಂದರೆ, $a^2 = b^2+c^2 + 2bc \cos(\pi - A)$

ಅಥವಾ $a^2 = b^2+c^2 - 2bc \cos A$.

ಅಭ್ಯಾಸ – 4.1

1. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{i} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 4)$, $\vec{c} = (2, 1, -3)$ ಆದರೆ $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. P ಯ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು Q ನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವು $2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ $\overrightarrow{QP}$ ಸದಿಶವನ್ನು ಮತ್ತು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. A, B, C, D ಗಳ ಸ್ಥಾನಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{a} - 2\vec{b}$ ಆಗಿವೆ. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ಸದಿಶಗಳನ್ನು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಸಿರಿ.

5. P, Q, R ಮತ್ತು S ನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ $PQ \parallel RS$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇವೆರಡರ ಉದ್ದಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. xy–ಸಮತಲದಲ್ಲಿ $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, 5)$ ಮತ್ತು

   $(l - m + 5)\,\vec{a} + (2m + 2)\,\vec{b} = (0,0)$

   ಆಗಿದ್ದರೆ l ಮತ್ತು m ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $(x - 2y + 3)\,\hat{i} + (3x + 1)\,\hat{j}$ ಯು ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವಾದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ, $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ ನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} . \vec{b}$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $\vec{a} = (\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} . \vec{b}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $\vec{a} = (-2, 1, 4)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$ ಆದರೆ $\vec{a} . \vec{b}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} + \vec{b}$ ಯು $\vec{a} - \vec{b}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳಾದ ಬಿಂದುಗಳು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳು $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

16. $\vec{a} = 9\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 9\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} \times \vec{b}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\vec{a} = (1, 2, -1)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (2, -1, 1)$ ಆದರೆ $\vec{a} \times \vec{b}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು θ ಆಗಿದ್ದರೆ $\sin\theta$ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ಈ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳಿಗೂ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ θ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವಾದರೆ $\sin\theta$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{b} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{c} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ಆದರೆ

$\vec{a} \times \vec{b} = 7\vec{c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

21. $\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಇವುಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದು ಇದರ ಬೆಲೆ 9 ಆಗಿದ್ದರೆ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

22. $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ಆದರೆ $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು $\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ಆದಾಗ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಭುಜಗಳು $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

25. $\vec{a} = \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ಇವು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

26. $A(1, 1, 2)$, $B(2, -1, 1)$ ಮತ್ತು $C(3, 2, 1)$ ಆದರೆ Δ^{le} ABCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

27. $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ ಮತ್ತು $4\vec{a} - 7\vec{b} + 7\vec{c}$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಿಸ್ಥವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

28. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೋಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

(iii) $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2 -4 5)$, $\vec{c} = (3, -5, 1)$

29. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸದಿಶಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$

(ii) $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

30. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} + p\hat{j} + 5\hat{k}$ ಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದರೆ p ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

31. ಈ ಕೆಳಗಿನ 4 ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ :

$\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

32. $[\hat{i} - \hat{j} \quad \hat{j} - \hat{k} \quad \hat{k} - \hat{i}]$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

33. $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

34. $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

ಆಗಿದ್ದರೆ, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದು $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b} \times \vec{c}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

35. $\vec{a} \times \{\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})\} = (\vec{a}.\ \vec{a})\ (\vec{b} \times \vec{a})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

36. $\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

37. (1/3, 1/3, 1/3) ಒಂದು ಏಕ ಸದಿಶವೆಂದು ಮತ್ತು ($\sin\alpha$, $\cos\alpha\ \cos\beta$, $\sin\alpha\ \sin\beta$) ಏಕ ಸದಿಶವಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

38. $3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $18\hat{i} - 12\hat{j} + m\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾದರೆ mನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

39. $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

40. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ಗಳು Δ^{le} ABC ಯ ಶೃಂಗಗಳ ಸ್ಥಾನಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

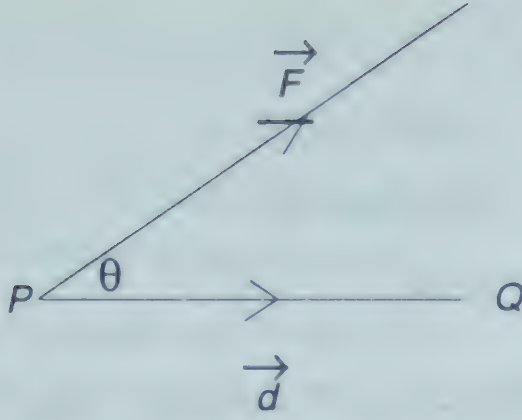
4.8 ಬಲ, ಕೆಲಸ ಮತ್ತು ಬಲದ ಮಹತ್ವ

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಂತೆ ಬಲವು ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಜಡತ್ವವನ್ನು ಅಥವಾ ಅದರ ಚಲನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತದೆ. ಬಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ನಮಗೆ ಈ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳು ಗೊತ್ತಿರಬೇಕು:

(i) ಅದರ ಪರಿಮಾಣ, (ii) ಅದು ಚಲಿಸುವ ದಿಕ್ಕು, ಮತ್ತು (iii) ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಬಲಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಬಲದಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಡುವ ಕೆಲಸ

ಬಲವನ್ನು ಒಂದು ಕಣದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಆ ಕಣವು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪಲ್ಲಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಡುವ ***ಕೆಲಸ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು w ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 4.19

$\vec{F}$ ಎಂಬ ಬಲವು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು P ಯಿಂದ Qಗೆ ಪಲ್ಲಟ ಮಾಡಿದೆ. $\vec{PQ} = \vec{d}$ ಎಂದಿರಲಿ. θ ವು $\vec{F}$ ಮತ್ತು $\vec{d}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.19).
$\vec{F}$ ನಿಂದ ಮಾಡಿದ ಕೆಲಸವನ್ನು

$$w = (F\cos\theta)\, d$$

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, $w = \vec{F}.\ \vec{d}$

ಇಲ್ಲಿ $\vec{F}$ ಮತ್ತು $\vec{d}$ ಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು F ಮತ್ತು d ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

(i) ಆದುದರಿಂದ w ಒಂದು ಸದಿಶವಲ್ಲ

(ii) ಬಲದಿಂದ ಪಲ್ಲಟಗೊಂಡ ದಿಕ್ಕು ಬಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಬಲವು ಮಾಡಿದ ಕೆಲಸವು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಆಗ $\theta = 90^\circ$ ಮತ್ತು $\cos 90^\circ = 0$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $5\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ ಎಂಬ ಬಲವು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು (4,2,6) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (5, 5, 7) ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪಲ್ಲಟ ಮಾಡಿದಾಗ ಬಲವು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $\vec{F} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k},\quad P \equiv (4, 2,, 6)$ ಮತ್ತು $Q \equiv (5,5,7)$

$\therefore \vec{PQ} = \vec{d} = \vec{OQ} - \vec{OP}\ (5, 5, 7) - (4, 2, 6)$

ಅಂದರೆ, $d = (1, 3, 1)$.

$\therefore$ ಕೆಲಸ, $w = \vec{F}.\ \vec{d}$

$= (5,6,1).\ (1,3,1)$

$= 5 + 18 + 1$

$= 24.$

2. ಒಂದು ಬಲದ ಪ್ರಮಾಣವು 50 ಮೂಲಮಾನಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದು, ಅದು $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಣವನ್ನು (–1, 3, 4) ನಿಂದ (3, 2, 5) ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶವು

$$\frac{3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore F = \frac{50\,(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{14}}$$

ಚಲನೆಗೊಳಗಾದ ಕಣದ ಮೊದಲಿನ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯದ ಸ್ಥಾನಗಳು

$P\,(-1, 3\ 4)$ ಮತ್ತು $Q\,(3, 2, 5)$.

$\therefore \vec{PQ} = \vec{d} = (3, 2, 5) - (-1, 3, 4)$

$= (4 - 1\ 1)$

$\therefore w = \vec{F}.\ \vec{d}$

$$= \frac{50}{\sqrt{14}}\ (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\ .\ (4\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$= \frac{50\,(12-2+1)}{\sqrt{14}} = \frac{50.11}{\sqrt{14}} = \frac{550}{\sqrt{14}}$$

3. $\vec{F_1} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{F_2} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{F_3} = 2\hat{i} + \hat{k}$

ಎಂಬ ಮೂರು ಬಲಗಳು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು $P(-1, 0, 0)$ ನಿಂದ $Q(5, 2, -1)$ಗೆ ಪಲ್ಲಟ ಮಾಡಿದಾಗ ಆಗುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಬಲಗಳ ಮೊತ್ತ ಬಲ

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

$= 5\hat{i} + 3\hat{k}.$

$\vec{d} = \vec{PQ} = (5, 2, -1) - (-1, 0, 0)$

$= (6, 2, -1)$

$\therefore$ ಕೆಲಸ $= \vec{F} \, . \, \vec{d} = (5, 0, 3) \, . \, (6, 2, -1)$

$= 30 - 3$

$= 27.$

4. $\vec{F} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ಎಂಬ ಬಲವು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು $(2, -1, 3)$ ನಿಂದ (a, a, a) ಗೆ ಪಲ್ಲಟ ಮಾಡಿದಾಗ ಆಗುವ ಕೆಲಸವು 25 ಆದರೆ a ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $P \equiv (2, -1, 3)$, $Q \equiv (a, a, a)$ ಮತ್ತು $\vec{F} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore \vec{PQ} = (a - 2, a + 1, a - 3)$

ಈಗ, $w = \vec{F} . \vec{PQ}$

ಅಂದರೆ, $25 = (3, 4, -5) \, . \, (a - 2, a + 1, a - 3)$

ಅಥವಾ, $25 = 3(a - 2) + 4(a + 1) - 5(a - 3)$

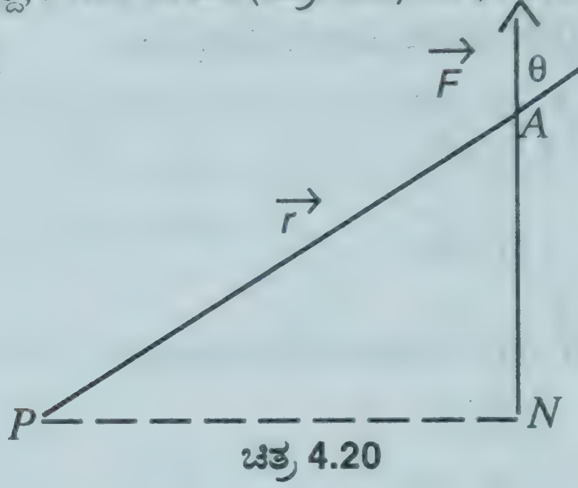
ಅಥವಾ, $25 = 3a - 6 + 4a + 4 - 5a + 15$

ಅಥವಾ, $2a = 12$

$\therefore \quad a = 6.$

ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಬಲಗಳ ಮಹತ್ವ

$\vec{F}$ ಎಂಬ ಬಲವು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಡಲಿ. Pಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದು, $\vec{PA}=\vec{r}$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4.20). ಆಗ, P ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಸದಿಶ ಬಲದ ಮಹತ್ವವನ್ನು



ಚಿತ್ರ 4.20

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಪರಿಮಾಣ

$|\vec{M}| = |\vec{F}|\, r \sin\theta$

$= |\vec{F}|\,(r \sin\theta)$

ಅಥವಾ $M = |\vec{F}|\,(PN)$

ಆದುದರಿಂದ ಬಲದ ಮಹತ್ವದ ಪರಿಮಾಣವು $|\vec{F}|$ ಮತ್ತು P ಯಿಂದ $\vec{F}$ಗೆ ಲಂಬದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ:

(i) Pಯು $\vec{F}$ ಸದಿಶದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ $PN=0$ ಆದ್ದರಿಂದ

ಬಲದ ಮಹತ್ವ, $\vec{M}=\vec{O}$.

(ii) $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$............ ಎಂಬ ಅನೇಕ ಬಲಗಳು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಅವುಗಳ ಬಲದ ಮಹತ್ವವು

$$\vec{M} = \vec{R} \times (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots\ldots\ldots) \quad [ಇಲ್ಲಿ,\ \vec{R} = \vec{PA}].$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\vec{F} = 5\hat{i} + 10\hat{j} + 16\hat{k}$ ಎಂಬ ಬಲವು $2\hat{i} - 7\hat{j} + 10\hat{k}$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮಹತ್ವವನ್ನು $-5\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$P \equiv (-5, 6, -10)$ ಮತ್ತು $A \equiv (2, -7, 10)$

$\therefore \vec{PA} = (7, -13, 20) = \vec{r}$

ಬಲದ ಮಹತ್ವ $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\therefore \vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & -13 & 20 \\ 5 & 10 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= -408\hat{i} - 12\hat{j} + 135\hat{k}$$

2. $\vec{F_1} = \hat{i} + 2\hat{j} - k$, $\vec{F_2} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2k$, $\vec{F_3} = 2\hat{i} + 3\hat{k}$ ಬಲಗಳು $(1, 0, -1)$ನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಮಹತ್ವವನ್ನು $(2, -1, 1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 6\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$, $P(2, -1, 1)$, $A\ (1, 0, -1)$

$\therefore \vec{R} = \vec{PA} = (-1, 1, -2)$

ಈಗ, $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

$$\therefore \vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 6\hat{i} - 8\hat{j} - 7\hat{k}$$

3. ಒಂದು ಬಲದ ಪ್ರಮಾಣ 6 ಮೂಲಮಾನಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದು ಇದು (1, 0, –4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈ ಬಲವು (1, 0, –4) ಮತ್ತು (2, 5, 1) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಬಲದ ಮಹತ್ವವನ್ನು (2, –1, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $|\vec{F}| = 6$, $A\ (1, 0, -4)$ ಮತ್ತು $B\,(2, 5, 1)$

$$\therefore \vec{AB} = (1, 5, -5)$$

$$\therefore \hat{AB} = \frac{\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}}{\sqrt{1 + 25 + 25}} = \frac{\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}}{\sqrt{51}}$$

$\vec{F}$ ಬಲವು $\vec{AB}$ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದ್ದು ಅದರ ಪ್ರಮಾಣವು **6** ಮೂಲಮಾನಗಳಷ್ಟು ಆಗಿದೆ.

$$\therefore \vec{F} = \frac{6\ (\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{51}}$$

ಈಗ, $A \equiv (1, 0, -4)$ $P \equiv (2, -1, 5)$

$$\therefore \vec{PA} = (1, -1, 9)$$

ಬಲದ ಮಹತ್ವ $\vec{PA} \times \vec{F}$

$$= \frac{6}{\sqrt{51}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 9 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{51}} [40\hat{i} + 14\hat{j} + 6\hat{k}]$$

4. $\vec{F_1} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{F_2} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ಈ ಎರಡು ಬಲಗಳು (4, –3, –2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲಾಗಿವೆ. ಈ ಬಲಗಳ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ಮತ್ತು $P \equiv (0, 0, 0)$, $A\ (4, -3, -2)$

$$\therefore \vec{PA} = (4, -3, -2)$$

ಬಲಗಳ ಮಹತ್ವವು $\vec{M} = \vec{PA} \times \vec{F}$

$$\therefore \vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

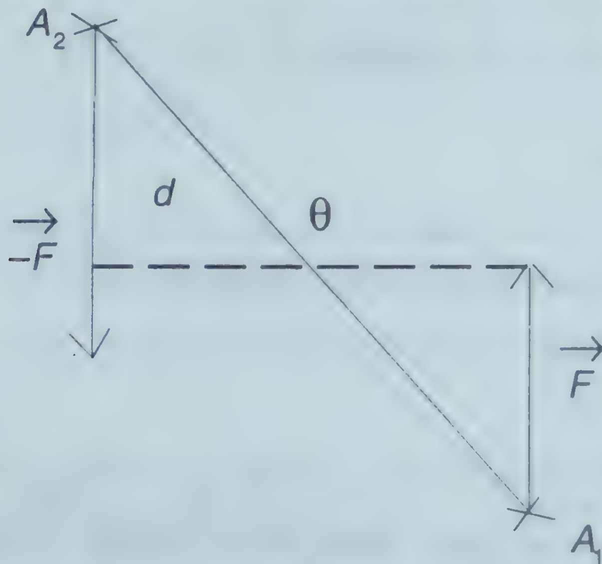
ಅಂದರೆ, $\vec{M} = -21\hat{i} - 22\hat{j} - 9\hat{k}$

$$\therefore \quad |\vec{M}| = \sqrt{441 + 484 + 81}$$

$$= \sqrt{1006}$$

4.9.1 ಯುಗ್ಮ (ಕಪಲ್)

ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಬಲಗಳು $\vec{F}$ ಮತ್ತು $-\vec{F}$ ಗಳನ್ನು *ಯುಗ್ಮ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 4.21

4.9.2 ಯುಗ್ಮದ ಮಹತ್ವ

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ $\vec{F}$ ಮತ್ತು $-\vec{F}$ ಗಳ ಮಹತ್ವಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಯುಗ್ಮದ ಮಹತ್ವ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1 ಚಿತ್ರ 4.21 ರಲ್ಲಿ $\vec{F}$ ಬಲವು A_1 ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $-\vec{F}$ ಬಲವು A_2 ನಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

$$\vec{OA_1} = \vec{r_1} \text{ ಮತ್ತು } \vec{OA_2} = \vec{r_2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\vec{F}$ ಮತ್ತು $-\vec{F}$ ಗಳ ಮಹತ್ವ (O ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ):

$$\vec{G} = \vec{r_1} \times \vec{F} + \vec{r_2} \times (-\vec{F})$$

$$= (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{F}$$

$$= \vec{A_2 A_1} \times \vec{F}$$

ಅಥವಾ $\vec{G} = \vec{R} \times \vec{F}$

$$= |\vec{R}||\vec{F}| \sin\theta \, \hat{n}$$

$\hat{n}$ ಎಂಬುದು $\vec{A_2 A_1}$ ಮತ್ತು $\vec{F}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕ ಸದಿಶ

ಅಥವಾ $\vec{G} = |\vec{F}| \, |\vec{R}| \sin\theta \, \hat{n}$

$$= |\vec{F}| \, d \, \hat{n} \quad [\text{ಏಕೆಂದರೆ } |\vec{R}| \sin\theta = d]$$

ಅಥವಾ $G = Fd$

ಇಲ್ಲಿ G ಮತ್ತು F ಎಂಬುವು $\vec{G}$ ಮತ್ತು $\vec{F}$ ಗಳ ಪರಿಮಾಣ.

ಉದಾಹರಣೆ

$\vec{F} = 5\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು ಯುಗ್ಮ $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$ ಆಗಿದ್ದು $\vec{F}$ ಬಲವನ್ನು (1, –2, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ $-\vec{F}$ ಬಲವನ್ನು (3, 5, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಯುಗ್ಮದ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಸದಿಶಗಳು $\overrightarrow{r_1} = (1, -2, 1)$ ಮತ್ತು $\overrightarrow{r_2} = (3, 5, 1)$.

$$\therefore \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = (-2, -7, 0)$$

$\{\overrightarrow{F}, -\overrightarrow{F}\}$ ಯುಗ್ಮದ ಮಹತ್ವವು

$$\overrightarrow{G} = \left(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}\right) \times \overrightarrow{F}$$

$$\therefore \overrightarrow{G} = (-2\hat{i} - 7\hat{j}) \times (5\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

ಅಂದರೆ, $\overrightarrow{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7\hat{i} - 2\hat{j} + 37\hat{k}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.2

1. (2, 1, 2) ಬಲವು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ (1, 3, 2) ಬಿಂದುವಿಗೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ ಮಾಡುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $5\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ ಬಲವು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು (1, 2, 4) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (2, 3, 6) ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪಲ್ಲಟಮಾಡಿದಾಗ ಮಾಡುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ಎರಡು ಬಲಗಳು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪಲ್ಲಟ ಮಾಡಿದಾಗ ಈ ಬಲಗಳ ಒಟ್ಟು ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಬಲದ ಪ್ರಮಾಣ 25 ಮೂಲಮಾನಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದು ಅದು $4\hat{i} + 3\hat{j}$ ಎಂಬ ಸದಿಶದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಬಲವು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು (–1, 3, 4) ನಿಂದ (3, 1, 7) ಬಿಂದುವಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಮಾಡಿದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. 3 ಬಲಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 5, 3, 1 ಮೂಲಮಾನಗಳಾಗಿದ್ದು ಇವುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$, ಮತ್ತು $2\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿವೆ.

ಈ ಬಲಗಳು ಒಂದು ಕಣವನ್ನು $(2\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $(5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪಲ್ಲಟಮಾಡಿದಾಗ ಆಗುವ ಕೆಲಸದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $4\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$ ಬಲವು (2, 1, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈ ಬಲದ ಮಹತ್ವವನ್ನು (4, 2, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\vec{F}=3\hat{j}-6\hat{k}$ ಎಂಬ ಬಲವು $A=4\hat{i}-2\hat{j}-9k$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮಹತ್ವವನ್ನು $B=(6\hat{i}-7\hat{k})$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\vec{F}=3\hat{i}+2\hat{j}-4k$ ಬಲವು (1, –1, 2) ನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಇದರ ಮಹತ್ವವನ್ನು (2, –1, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಬಲದ ಪ್ರಮಾಣ 6 ಮೂಲಮಾನಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದು ಅದು (2, 1, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಬಲವು (2, 1, 4) ಮತ್ತು (4, –1, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಬಲದ ಮಹತ್ವವನ್ನು (2, –2, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ಬಲವು $\overrightarrow{AB}$ ಸದಿಶದ ಮೂಲಕ ಗುರುತಿಸಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, $A \equiv (1, 2, -3)$ ಮತ್ತು $B \equiv (3, -4, 2)$. ಈ ಬಲದ ಮಹತ್ವವನ್ನು (–2, 4, –6) ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 5

ಸಂಕುಲಗಳು

5.1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಮುಖ್ಯವಾದ *ಸಂಕುಲ* ಎಂಬ ಬೈಜಿಕ ರಚನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದು ಅಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಶಾಖೆಯಾಗಿದೆ. ಎ.ಎಲ್. ಕೌಶಿ ಮತ್ತು ಇ. ಗ್ಯಾಲ್ವಾ ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮೊತ್ತಮೊದಲಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು. ಈಗ ಈ ಸಂಕುಲ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

$N =$ {1, 2, 3...} ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$Z =$ {0, ±1, ± 2, ± 3 ....} ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ

$Q = \{p/q, q \neq 0, p, q \in Z\}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$Q - \{0\}$ ಸೊನ್ನೆ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$Q+ =$ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$R =$ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$R - \{0\} =$ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$R+ =$ ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$M =$ ಎಲ್ಲಾ 2x2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗಣ

$Z_m =$ ಮಾಡ್ಯುಲೋ m ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅಂದರೆ 0, 1, 2 .. $(m-1)$ ಗಣ

$\oplus_m =$ ಮಾಡ್ಯುಲೋ m ಸಂಕಲನ

$\otimes_m =$ ಮಾಡ್ಯುಲೊ m ಗುಣಾಕಾರ

5.1.2 ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ

S ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗುಣವಾಗಿರಲಿ. * (ಸ್ಟಾರ್, ನಕ್ಷತ್ರ) ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು Sನ ಅಂಶಗಳಾದ a ಮತ್ತು b ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ $a * b$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. ಈ $a*b = c$ಯು ಕೂಡ Sನ ಅಂಶವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ * ನ್ನು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ ಅಥವಾ *ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ $a, b \in S$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a*b = c \in S$ ಎಂಬ ಈ ಗುಣವನ್ನು * ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಹೊಂದಿದಂತೆ S ಗಣದ **ಆವೃತ ಗುಣ** (ಕ್ಲೋಜರ್ ಪ್ರಾಪರ್ಟಿ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ

ಆದುದರಿಂದ, S ಗಣದಲ್ಲಿ * ಯುಗಳಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಆವೃತ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು $N = \{1,2, 3...\}$. ಗಣದಲ್ಲಿ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನವು ಕೂಡ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: $8 + 12 = 20 \in N$

$5 + 14 = 19 \in N$, ಇತ್ಯಾದಿ

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $4 \times 13 = 52 \in N$

$7 \times 2 = 14 \in N$, ಇತ್ಯಾದಿ

2. ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರವು N ಗಣದಲ್ಲಿ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲ.

ಉದಾ: $8-12 = -4 \notin N$

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \notin N$$

3. Z, Q ಮತ್ತು R ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯವಕಲನವು ಒಂದು ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ.

4. Q ಮತ್ತು R ಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಕಾರವು ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ ಅಲ್ಲ. ಉದಾ:

$$\frac{\frac{3}{5}}{0} \notin Q \qquad \frac{\sqrt{3}}{0} \notin R$$

5. ಆದರೆ Q^+, R^+, $Q - \{0\}$ ಮತ್ತು $R - \{0\}$ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ, ವ್ಯವಕಲನ ಎಲ್ಲವೂ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ.

6. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $\times$ ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) R ಗಣದಲ್ಲಿ $a \times b = \sqrt{ab}$

(ii) Q ಗಣದಲ್ಲಿ, $a \times b = \frac{ab}{8}$

(iii) N ಗಣದಲ್ಲಿ $a \times b = a^b$

(iv) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R \right.$ ಗಣದಲ್ಲಿ $\left. \right\}$ ಮಾತೃಕೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರ.

(i) $a = 3, \quad b = -1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ
$a \times b = \sqrt{3 \times -1} = \sqrt{-3} \notin R$ ಆದುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ $\times$ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ ಅಲ್ಲ.

(ii) $a \times b = \frac{ab}{8}$ ಎಂಬುದು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು $q \neq 0$ ಆದುದರಿಂದ $\frac{ab}{8} \in Q$. ಆದ್ದರಿಂದ, $\times$ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ.

(iii) N ಗಣದಲ್ಲಿ $a \times b = a^b$ ಯಾವಾಗಲೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾ: $5 \times 3 = 5^3 = 125 \in N$. ಆದ್ದರಿಂದ $\times$ ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ.

(iv) ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು 2×2 ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಪುನಃ 2×2 ಮಾತೃಕೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು 2×2

ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ 2 x 2 ಮಾತೃಕೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮಾತೃಕೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಎರಡೂ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

5.1.3 ಸಂಕುಲ

G ಯು ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. * ಯು *G* ಮೇಲಿನ ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಈ ಕೆಳಕಂಡ 4 ಲಕ್ಷಣಗಳು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಲ್ಲಿ *G* ಯನ್ನು *ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಹೊಂದಿರುವ ***ಸಂಕುಲ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(i) **ಆವೃತ ಗುಣ:** $\forall\ a, b \in G,\ a*b \in G$

(ii) **ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:** $\forall\ a,b,c \in G$
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

(iii) **ಏಕದದ ಅಸ್ತಿತ್ವ:** $\forall a \in G$,
$a \times e = e \times a = a$ ಆಗಿರುವಂತೆ
$\exists\, e \in G$ ಹೀಗಿದ್ದಾಗ e ಯನ್ನು ***ಏಕದ*** (ಅಥವಾ ***ಅನನ್ಯತಾಂಶ***) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ

(iv) **ವಿಲೋಮ ಅಂಶದ ಅಸ್ತಿತ್ವ:** $\forall\ a \in G$
$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$
ಆಗು ವಂತೆ $\exists\, a^{-1} \in G$ ಹೀಗಿದ್ದಾಗ a^{-1}ನ್ನು *G* ಯಲ್ಲಿಯ *a* ಅಂಶದ ವಿಲೋಮ ಅಂಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ 4 ಲಕ್ಷಣಗಳು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಲ್ಲಿ *G* ಯನ್ನು *ಅನ್ವಯಿಸುವ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $(G, *)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ 4 ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು *G* ಯು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ***ಪರಿವರ್ತನೀಯ*** (ಅಥವಾ ಅಬಿಲಿಯನ್) ***ಸಂಕುಲ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(v) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: $\forall\ a, b \in G,\ a \times b = b \times a$.

5.1.4 ಅರೆಸಂಕುಲಗಳು

ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣ *G* ಯ ಮೇಲೆ * ಒಂದು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದು, ಅದು ಆವೃತ ಗುಣ ಮತ್ತು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು (ಸೆಮಿಗ್ರೂಪ್) ***ಅರೆ ಸಂಕುಲ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $(N, +), (R - \{0\}, *)$

ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲ:

G ಯು ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ $(G, *)$ ವು ಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲವೆಂದೂ, G ಯು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣವಾದ್ದಲ್ಲಿ $(G, *)$ ವು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಸಂಕುಲದ ಪರಿಮಾಣ:

$(G, *)$ ವು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದು, G ಗಣದಲ್ಲಿ n ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆಗ n ನ್ನು ಆ ಸಂಕುಲದ ಪರಿಮಾಣ (ಆರ್ಡರ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ: $O(G) = n$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣವು '+' ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಮೂಹ. ಇಲ್ಲಿ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವು

$$Z = \{0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

(i) **ಆವೃತ ಗುಣ:** ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\forall a, b \in Z, \quad a + b \in Z$$

ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

(ii) **ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:**

$$\forall a, b, c \in Z, \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

ಉದಾ: $2, -5, 7 \in Z$

$2 + (-5 + 7) = 2 + 2 = 4$ ಆಗಿದ್ದು,

$(2 + (-5)) + 7 = -3 + 7 = 4.$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

(iii) ಏಕದದ ಅಸ್ತಿತ್ವ:

Z ನಲ್ಲಿ '0' ಒಂದು ಅಂಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\forall\ a \in Z, \quad a + 0 = 0 + a = a$

ಆದುದರಿಂದ Z ನಲ್ಲಿ ಏಕದವು ಇದೆ.

(iv) ವಿಲೋಮ ಅಂಶದ ಅಸ್ತಿತ್ವ:

Z ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿದೆ:

$\forall\ a \in Z, \quad a + (-a) = (-a) + a = 0$

ಆಗುವಂತೆ $-a \in Z$.

(v) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣ

$\forall a, b \in Z, \ a + b = b + a$

ಆದುದರಿಂದ, $(Z, +)$ ವು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ. Z ನಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಅಂಶಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

2. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $(Q, +)$, $(R, +)$ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು. $Q-\{0\}$, $R-\{0\}$ ಎರಡು ಗಣಗಳೂ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲೂ ಅಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು.

3. $G=\{1,-1\}$ ಎಂಬುದು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಏಕದವು '1' ಆಗಿರುತ್ತದೆ. 1 ರ ವಿಲೋಮ 1 ಮತ್ತು -1 ರ ವಿಲೋಮ -1.

4. M ಎಂಬುದು 2 x 2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಅಂಶಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ $(M, +)$ ಯು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Big/ a,b,c,d \in R \right\}$$

(i) $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in G$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in M$

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = C$$

ಇಲ್ಲಿ, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$ ಮತ್ತು $C \in M$

ಆದುದರಿಂದ $(M, +)$ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಮೇಲಿನ (i) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ, $A, B, C \in M$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ, $$A + (B+C) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & a_4 + b_4 + c_4 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $$(A+B)+C = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & a_4 + b_4 + c_4 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ಬಂದಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

ಆದುದರಿಂದ $(M, +)$ ನಲ್ಲಿ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ಎಂಬುದು $(M, +)$ ನ ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಏಕೆಂದರೆ,

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = A \quad \text{.... (1)}$$

ಅಂತೆಯೇ, $0 + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = A$ .... (2)

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$.

ಆದುದರಿಂದ $(M, +)$ ಯಲ್ಲಿ ಏಕದವಿರುತ್ತದೆ.

(iv) $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ ಎಂಬ ಮಾತೃಕೆಗೆ

$$-A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix}$$

ಎಂಬುದು A ಯ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $A + (-A) = \mathbf{0} = (-A) + A)$

ಆದ್ದರಿಂದ, Mನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾತೃಕೆಗೂ ಅದರ ವಿಲೋಮವಿದೆ.

(v) $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}$ ... (1)

$$B + A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 & b_4 + a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} \quad \text{... (2)}$$

ಏಕೆಂದರೆ, $+$ವು Rನಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $A + B = B + A$

ಅಂದರೆ, $(M, +)$ ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಮೂಹವಾಗಿದೆ.

5. $Q - \{1\}$ ನಲ್ಲಿ 'o' ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯು $a \circ b = a + b - ab$ ಆದಾಗ $(Q - \{1\}, o)$ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದರಲ್ಲಿ $\frac{5}{3} \circ x = 3^{-1}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ .

ಇಲ್ಲಿ, $Q - \{1\}$ ಅಂದರೆ '1' ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

ಈಗ, $a, b \in Q - \{1\}$ ಆಗಿರಲಿ.

(*i*) ಆವೃತ ಗುಣ :

$a \circ b = a + b - ab$ ಎಂಬುದು ಕೂಡಾ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು 1 ಅಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. $a \circ b$ ಎಂಬುದು 1 ಆಗಿದ್ದರೆ,

$a + b - ab = 1$

ಅಥವಾ $a + b - ab - 1 = 0$

ಅಥವಾ $(a - 1)(b - 1) = 0$

ಆದರೆ, $a = 1$ ಅಥವಾ $b = 1$, ಇದು ಎರಡೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ

ಏಕೆಂದರೆ $a, b \in Q - \{1\}$

ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:

$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - bc)$

$= a + b + c - bc - a(b + c - bc)$

$= a + b + c - bc - ab - ac + abc$ .... (1)

$$(aob)oc = (a + b - ab)\,oc$$
$$= a + b - ab + c - (a + b - ab)\,c$$
$$= a + b - ab + c - ac - bc + abc \qquad \text{.... (2)}$$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(iii) ಏಕದದ ಅಸ್ತಿತ್ವ: e ಯು ಏಕದವಾಗಿದ್ದರೆ

$aoe = eoa = a \quad \forall a \in Q - \{1\}$

$aoe = a$ ಮತ್ತು $eoa = a$

ಅಂದರೆ, $a + e - ae = a$ ಮತ್ತು $e + a - ea = a$

ಅಥವಾ $e - ae = 0$ ಮತ್ತು $e - ea = 0$

ಅಥವಾ $e(1-a) = 0$ ಮತ್ತು $e = (1-a) = 0$

$\therefore\ e = 0$ ಅಥವಾ $a = 1$

ಆದರೆ, $a = 1$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ $a \in Q - \{1\}$

ಆದುದರಿಂದ, $e = 0 \in Q - \{1\}$

ಅಂದರೆ, 0 ವು ಏಕದವಾಗಿರತ್ತದೆ.

(iv) ವಿಲೋಮ ಅಂಶದ ಅಸ್ತಿತ್ವ:

$a \in Q - \{1\}$ ಅಂಶದ ವಿಲೋಮ x ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ

$aox = xoa = 0$, ಏಕದಾಂಶ

$\therefore\ aox = 0$ ಮತ್ತು $xoa = 0$

ಅಥವಾ $a + x - ax = 0$ ಮತ್ತು $x + a - x a = 0$

ಅಥವಾ $x - ax = -a$ ಮತ್ತು $x - xa = -a$

ಅಥವಾ $x(1 - a) = -a$ ಮತ್ತು $x(1 - a) = -a$

$\therefore \quad x = \dfrac{a}{a-1}$

ಇಲ್ಲಿ $a - 1 \neq 0$ ಏಕೆಂದರೆ $a \in Q - \{1\}$

$\therefore$ a ಯ ವಿಲೋಮವು $\dfrac{a}{a-1}$

ಮತ್ತು $\dfrac{a}{a-1} \in Q - \{1\}$

(v) **ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣಗಳು**

ಯಾವುದೇ ಅಂಶಗಳಾದ $a, b \in Q - \{1\}$

$aob = a + b - ab$

$boa = b + a - ba$

$Q - \{1\}$ ರಲ್ಲಿ $a + b = b + a, ab = ba$

$\therefore aob = boa$

ಆದುದರಿಂದ, $Q - \{1\}$ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ

ಈಗ, $-\dfrac{5}{3} o x = 3^{-1}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ನಮಗೆ $a^{-1} = \dfrac{a}{a-1}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore 3^{-1} = \dfrac{3}{3-1} = \dfrac{3}{2}$

$\frac{5}{3} \circ x = 3^{-1}$ ವನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ :

$$\frac{5}{3} + x - \frac{5}{3}\ x = \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{2} = x\left[\frac{5}{3}\ -1\right] \text{ ಅಥವಾ } \quad \frac{1}{6} = x\frac{2}{3}$$

ಆದುದರಿಂದ $x = \frac{1}{4}$

6. ಸದಿಶಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸದಿಶ ಗುಣಾಕಾರವು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಗುಣವು ಒಂದು ಸಂಕುಲವಲ್ಲವೆಂದೂ, ಮತ್ತು ಸದಿಶ ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಎರಡು ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\vec{a} \times \vec{b}$ ಕೂಡ ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

ಅಂದರೆ ಸದಿಶ ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ನಿಜವಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಸದಿಶ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವಲ್ಲ.

ಸದಿಶ ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ

(i) $\vec{a} + \vec{b}$ ಕೂಡಾ ಒಂದು ಸದಿಶವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(iii) ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವು ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ;

(iv) $-\vec{a}$ ಸದಿಶವು $\vec{a}$ ಸದಿಶದ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು

(v) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಸದಿಶ ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸದಿಶಗಳ ಗಣವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

7. $$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ಎಂಬ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗಣವು (αವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$G = \{A_\alpha \mid \alpha \in R\}$, $A_\alpha, A_\beta \in G$ ಆಗಿರಲಿ.

(i) $$A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = A_{\alpha+\beta} \in G$$

ಏಕೆಂದರೆ α, β ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\alpha+\beta$ವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, G ನಲ್ಲಿ ಆವೃತ ಗುಣವು ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(ii) $n \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣದಲ್ಲೂ ಈ ಗುಣವು ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(iii) $$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = A_0$$

ಎಂಬುದು ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಮಾತೃಕೆ Aಯ ವಿಲೋಮ $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}$

ಇಲ್ಲಿ, $|A_\alpha| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0 \quad \therefore A_\alpha^{-1}$ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ.

$$\text{Adj } A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = A_{-\alpha} \in G$$

ಆದುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ಅಂಶ A_α ಕ್ಕೂ ವಿಲೋಮವು ಇದೆ.

(v) $$A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix}$$

α,β ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\alpha+\beta = \beta+\alpha$$

$$\therefore A_\alpha \cdot A_\beta = A_\beta \cdot A_\alpha$$

ಅಂದರೆ, G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

5.1.5 ಮಾಡ್ಯುಲೊ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ

Z_6 ನಲ್ಲಿ ಮ್ಯಾಡುಲೋ 6 ಸಂಕಲನದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ.

$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

$\oplus_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\oplus_6$ ಸಂಕಲನದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು Z_6 ನ ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅದನ್ನು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಶೇಷವನ್ನು ಸಂಧಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

8. ಮಾಡ್ಯುಲೋ ಗಣಿತದ ಸಂಕುಲಗಳು

$Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ಮಾಡ್ಯುಲೊ 5 ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ $(Z_5, \oplus_5)$ ಯು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\oplus_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(i) **ಆವೃತ ಗುಣ:**

ಕೋಷ್ಟಕದ ದಾಖಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ Z_5 ಗೆ ಸೇರಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(ii) **ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:**

Z_5 ನ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$(2 \oplus_5 4) \oplus_5 3 = 1 \oplus_5 3 = 4$$

ಮತ್ತು $2 \oplus_5 (4 \oplus_5 3) = 2 \oplus_5 2 = 4$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) ಏಕದವು 0 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ಆಗಿರುವ ಅಡ್ಡ ಸಾಲು ಮೇಲಿನ ಸಾಲಿಗೆ ತದ್ರೂಪವಾಗಿದೆ.

(iv) 0ವು ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡ ಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಅಂಶವು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ:

$0 + 0 = 0$

$1 + 4 = 4 + 1 = 0, \quad 4 + 1 = 1 + 4 = 0$

$2 + 3 = 3 + 2 = 0 \quad \therefore (0)^{-1} = 0 \quad (2)^{-1} = 3, \quad (4)^{-1} = 1$

$3 + 2 = 2 + 3 = 0 \quad (1)^{-1} = 4 \quad (3)^{-1} = 2$

ಪ್ರತಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ ವಿಲೋಮವಿದೆ.

(v) ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ಣದ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ ಕೆಳಗಡೆಯ ಪ್ರತಿಫಲಿತ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $(Z_5, \oplus_5)$ ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

9. $G = \{2,4,6,8\}$ ಇದು ಮ್ಯಾಡುಲೊ 10ರ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

$\otimes_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ದಾಖಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ G ಗೆ ಸೇರಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣ ನಿಜವಾಗಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: Gಯ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, , $2, 6, 8 \in G$

$(2 \otimes 6) \otimes 8 = 2 \otimes 8 = 6$

$2 \otimes (6 \otimes 8) = 2 \otimes 8 = 6$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) ಏಕದವು '6' ಆಗಿದೆ ; ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆ '6' ಆಗಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಅದರ ಮೇಲಿನ ಸಾಲಿಗೆ ತದ್ರೂಪವಾಗಿದೆ.

(iv) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶವು ತಿಳಿದಿರುತ್ತದೆ:

$2 \otimes 8 = 8 \otimes 2 = 6 \qquad \therefore (2)^{-1} = 8$

$4 \otimes 4 = 4 \otimes 4 = 6 \qquad \therefore (4)^{-1} = 4$

$6 \otimes 6 = 6 \otimes 6 = 6 \qquad \therefore (6)^{-1} = 6$

$8 \otimes 2 = 2 \otimes 8 = 6 \qquad \therefore (8)^{-1} = 2$

ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ ವಿಲೋಮವಿದೆ.

(v) ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ಣದ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ ಕೆಳಗಡೆ ಪ್ರತಿಫಲಿತ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವೂ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ Gಯು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

10. $G=\{1,3,5,7,8\}$ ಇದು ಮಾಡ್ಯುಲೊ 11 ರ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

$\otimes_{11}$	1	3	5	7	8
1	1	3	5	7	8
3	3	9	4	10	2
5	5	4	3	2	7
7	7	20	2	5	1
8	8	2	7	1	9

ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ದಾಖಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವು ಅಂಶಗಳು, 9, 10, 4 ಅಂದರೆ $\in G$ ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ನಿಜವಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ G ಯು ಸಂಕುಲವಲ್ಲ.

5.2 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಕುಲ

$A = \{a, b, c\}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

A ಯಲ್ಲಿ 3 ಅಂಶಗಳಿದ್ದು $^3P_3 = 6$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದು ಗಣವು ಈ 6 ವಿವಿಧ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಮಮಿತ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು S_3 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ

$$S_3 = \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}\right]$$

ಈ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದಾಗ

$$S_3 = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$$

ಎರಡು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎರಡು ಕ್ರಮಯೋಜನೆ P_3 ಮತ್ತು P_4 ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ

$$P_3 . P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = P_0$$

ಎರಡನೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಮೊದಲಿನ ಸಾಲನ್ನು ಒಂದನೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಎರಡನೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಆಗ

$$P_3.P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = P_0$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $P_3.P_2$ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈಗ, $P_2.P_1$ ಮತ್ತು $P_1.P_2$ ಗಳನ್ನು ಪರಿಶಿಲಿಸೋಣ:

$$P_2.P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = P_4$$

$$\therefore P_2.P_1 = P_4$$

ಹಾಗೆಯೇ, $P_1.P_2$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ:

$$P_1.P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = P_3$$

$$\therefore P_2.P_1 \neq P_1.P_2$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.

ಏಕದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ

$$P_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

ಎಂಬುದು ಏಕದ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆ

ಉದಾಹರಣೆ

$$P_0.P_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = P_5$$

ವಿಲೋಮ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ

$$P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

ಎಂಬುದರ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯು P_1 ನ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = P_1 \quad \therefore P_1^{-1} = P_1$$

ಹಾಗೆಯೇ, $P_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

$$\therefore P_3^{-1} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = P_4 \quad \therefore P_3^{-1} = P_4$$

ಪ್ರಮೇಯ : ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗಣ S_3 ಒಂದು ಸಂಕುಲ.

ಸಾಧನೆ:

$S = \{a, b, c\}$ ಆದಾಗ

$S_3 = \{P_o, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

ಇಲ್ಲಿ, $P_o = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ $P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$

$P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$ $P_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

$P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ $P_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

ಮೊದಲು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬರೆಯೋಣ:

.	P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_o	P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_o	P_3	P_2	P_5	P_4
P_2	P_2	P_4	P_o	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_1	P_4	P_o	P_2
P_4	P_4	P_2	P_5	P_o	P_3	P_1
P_5	P_5	P_3	P_4	P_1	P_2	P_o

(i) **ಆವೃತ ಗುಣ:** ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳೂ S_3 ಯಲ್ಲಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತಗುಣ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) **ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:** P_3, P_1, P_5 ಈ ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಈಗ, $(P_3.P_1).P_5 = P_5.P_5 = P_o$

ಮತ್ತು $P_3.(P_1.P_5) = P_3.\ P_4 = P_o$

$\therefore (P_3.P_1).P_5 = P_3.(P_1.P_5)$

ಹೀಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಮನಗಾಣಬಹುದು.

(iii) ಏಕದ ಅಂಶ: ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ P_0 ವು ಏಕದ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.

(iv) ವಿಲೋಮ: ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ

$P_0^{-1} = P_0$ $\quad P_3^{-1} = P_4$

$P_1^{-1} = P_1$ $\quad P_4^{-1} = P_3$

$P_2^{-1} = P_2$ $\quad P_5^{-1} = P_5$

ಅಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ವಿಲೋಮಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, S_3 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲ. ಆದರೆ ಇದು ಅಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

5.3 ಒಂದರ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ, ಚತುರ್ಥ ಮೂಲಗಳು

ಇವುಗಳು ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

(1) **ಒಂದರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು**

$x = \sqrt{1}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore x^2 = 1$

ಅಥವಾ $x^2 - 1 = 0$

ಅಥವಾ $(x-1)(x+1) = 0$

ಅಂದರೆ, $x = 1, -1$ ಇವುಗಳು ಒಂದರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು

ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕ : $G = \{1, -1\}$ ಆಗಿರಲಿ.

×	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳೂ G ಯಲ್ಲಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:

$1, -1, 1 \in G$

$\{1 \times (-1)\} \times 1 = -1 \times 1 = -1$

$1 \times \{(-1) \times 1\} = 1 \times -1 = -1$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) 1 ಇದು ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $1 \times 1 = 1 \quad \therefore (1)^{-1} = 1$

$(-1) \times (-1) = 1 \quad \therefore (-1)^{-1} = -1$

ಆದುದರಿಂದ G ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ವಿಲೋಮಗಳಿವೆ.

(v) ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವೂ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

ಒಂದರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ಗುಣಾಕಾರ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

(2) **ಒಂದರ ಘನಮೂಲಗಳು**

$x = 1^{1/3}$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore \; x^3 - 1 = 0$

ಅಥವಾ $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

ಅಥವಾ $x - 1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + x + 1 = 0$

ಅಂದರೆ, $x = 1$

ಮತ್ತು $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$

$$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ಆದರೆ, } \quad \omega^2 = \frac{(-1+i\sqrt{3})^2}{2}$$

ಅಂದರೆ $\omega^2 = \dfrac{1 + i^2 3 - 2i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1, \omega, \omega^2$ ಒಂದರ ಘನಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ.

$G = \{1, \omega, \omega^2\}$ ಆಗಿರಲಿ.

G ಗಣದಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೋಷ್ಟಕ:

.	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

ಏಕೆಂದರೆ, $\omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$

$\omega^2.\omega^2 = \omega^4 = \omega.\omega^3 = \omega.1 = \omega$

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳೂ G ಯಲ್ಲಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(*ii*) ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ: $\omega^2, 1, \omega \in G$

ಈಗ, $(\omega^2.1) . \omega = \omega^3 = 1$

ಮತ್ತು $\omega^2 . (1 . \omega) = \omega^3 = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) 1 ಏಕದವಾಗಿದೆ.

(iv) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $1.1 = 1$ $\therefore (1)^{-1} = 1$

$\omega.\omega^2 = \omega^2.\omega = 1$ $\therefore (\omega)^{-1} = \omega^2$

$\omega^2.\omega = \omega.\omega^2 = 1$ $(\omega^2)^{-1} = \omega$

ಆದುದರಿಂದ Gಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ವಿಲೋಮಗಳಿವೆ.

(v) ಕೋಷ್ಟಕದ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ಣದ ಕೆಳಗೆ ಮತ್ತು ಮೇಲೆ ಸಮಾನ ಅಂಶಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. ಹೀಗೆ, 1 ರ ಘನಮೂಲಗಳ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

(3) ಒಂದರ ಚತುರ್ಥ ಮೂಲಗಳು

$x = 1^{1/4}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore x^4 - 1 = 0$

ಅಥವಾ $(x^2-1)(x^2+1) = 0$

ಅಥವಾ $x^2-1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+1 = 0$

ಅಥವಾ $(x-1)(x+1) = 0$ ಮತ್ತು $x^2 = -1$

$\therefore x = \pm 1, \pm\sqrt{-1} = \pm 1, \pm i$

ಅಂದರೆ, $\{1, -1, i, -i\}$ ಯು 1 ರ ಚತುರ್ಥ ಮೂಲಗಳ ಗಣ.

$G = \{1, -1, i, -i\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೋಷ್ಟಕ:

×	1	−1	i	$-i$
1	1	−1	i	$-i$
−1	−1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	−1	1
$-i$	$-i$	i	1	−1

(i) ಆವೃತ ಗುಣ: ಕೋಷ್ಟಕದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳೂ G ಯಲ್ಲಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) **ಸಹ ವರ್ತನೀಯ ಗುಣ:** $-1, i, -i \in G$ ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಈಗ, $-1 \times (i \times -i) = -1 \times (1) = -1$

ಮತ್ತು $(-1 \times i) \times -i = -i \times -i = i^2 = -1$

ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

(iii) 1 ಏಕದವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $1 \times 1 = 1$ $\therefore (1)^{-1} = 1$

$(-1) \times (-1) = 1$ $\therefore (-1)^{-1} = -1$

$i \times (-i) = (-i) \times i = 1$ $\therefore (+i)^{-1} = -i$

$-i \times i = (i) \times (-i) = 1$ $\therefore (-i)^{-1} = i$

ಆದುದರಿಂದ G ಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ವಿಲೋಮಗಳಿವೆ.

(v) ಕೋಷ್ಟಕದ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ, ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿವೆ.
ಆದುದರಿಂದ $\{1, -1, i, -i\}$ ಯು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

5.4 ಸಂಕುಲದ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳು

1. ಸಂಕುಲದ ಏಕದವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ

$(G, *)$ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿರಲಿ.

ಅದರಲ್ಲಿ, e ಮತ್ತು e' ಎರಡು ಏಕದವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, e ಯು ಏಕದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$e' * e = e * e' = e'$ ...(1)

ಹಾಗೆಯೇ, e' ಯು ಏಕದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$e * e' = e' * e = e$ ...(2)

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$e = e'$

ಆದುದರಿಂದ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಏಕದವಿರುತ್ತದೆ.

2. $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅಂಶದ ವಿಲೋಮವೂ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

$(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ e ಯು ಏಕದವಾಗಿರಲಿ.

a ಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶವಾಗಿರಲಿ. b ಮತ್ತು c ಗಳು a ಯ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿರಲಿ

ಅಂಶ b ಯು a ಯ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುವ ಕಾರಣ

$a*b = b*a = e$ ... (1)

ಹಾಗೆಯೇ c ಯು a ಯ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುವ ಕಾರಣ

$a*c = c*a = e$ ... (2)

ಈಗ, $b = b*e$ [ಏಕದದ ಗುಣದಿಂದ]

$= b*(a*c)$ [(2) ರಿಂದ]

$= (b*a)*c$ [ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣದಿಂದ]

$= e * c$ [(1) ರಿಂದ].

ಅಂದರೆ, $b = c$ (ಏಕದದ ಗುಣದಿಂದ)

ಆದುದರಿಂದ, aಯ ವಿಲೋಮವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

3. **$(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ aಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ $(a^{-1})^{-1} = a$**

a ಅಂಶದ ವಿಲೋಮ $a^{-1} = x$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore x * a = a^{-1} * a = e$ [ವಿಲೋಮ ಗುಣದಿಂದ]

$a * x = a * a^{-1} = e$

$\therefore x * a = a * x = e$

ಇದರಿಂದ xನ ವಿಲೋಮವು a ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$\therefore x^{-1} = a$

ಅಂದರೆ, $(a^{-1})^{-1} = a$

4. **a ಮತ್ತು b ಗಳು (G, x) ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(a \times b)^{-1} = b^{-1} \times a^{-1}$**

ಈ ಮುಂದಿನ 'ಗುಣಲಬ್ದ' ವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$(a \times b) \times (b^{-1} \times a^{-1})$

$= a \times [b \times (b^{-1} \times a^{-1})]$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$= a \times [(b \times b^{-1}) \times a^{-1})]$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$= a \times (e \times a^{-1})$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$= a \times a^{-1}$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$= e$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$\therefore (a \times b) \times (b^{-1} \times a^{-1}) = e$ ...(1)

ಈ ಮುಂದಿನದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ

$(b^{-1} \times a^{-1}) \times (a \times b)$

$= b^{-1} \times [a^{-1} \times (a \times b)]$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$= b^{-1} \times [(a^{-1} \times a) \times b)]$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$= b^{-1} \times (e \times b)$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$= b^{-1} \times b$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$= e$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$\therefore (b^{-1} \times a^{-1}) \times (a \times b) = e$ ... (2)

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$(a \times b) \times (b^{-1} \times a^{-1}) = (b^{-1} \times a^{-1}) \times (a \times b) = e$

ಅಂದರೆ, $(a \times b)$ದ ವಿಲೋಮವು $b^{-1} \times a^{-1}$

$\therefore (a \times b)^{-1} = b^{-1} \times a^{-1}$

5. ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ನಿರಸನ ನಿಯಮಗಳು

a, b, c ಗಳು $(G,*)$ ಸಂಕುಲದ ಯಾವುದೇ 3 ಅಂಶಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ (i) $a*b = a*c \Longrightarrow b=c$ ಎಡ ನಿರಸನ ನಿಯಮ

(ii) $a*b = c*b \Longrightarrow a=c$ ಬಲ ನಿರಸನ ನಿಯಮ

(i) $a*b = a*c$ ... (1)

$a \in G \Longrightarrow a^{-1} G$

ಈಗ, (1) ರಿಂದ

$a^{-1}*(a*b) = a^{-1}*(a*c)$

$\therefore (a^{-1}*a)*b = (a^{-1}*a)*c$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $e*b = e*c$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $\cdot\, b = c$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$\therefore a*b = a*c \Longrightarrow b=c$

(ii) $a*b = c*b$ ... (2)

ಆಗಿರಲಿ. ಯಾವುದೇ ಅಂಶ

$b \in G \Longrightarrow b^{-1} \in G$

ಈಗ, $(a*b)*b^{-1} = (c*b)*b^{-1}$ [(2) ರಿಂದ]

$\therefore a*(b*b^{-1}) = c*(b*b^{-1})$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $a*e = c*e$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$\therefore a = c$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$\therefore a*b = c*b \Rightarrow a=c$

6. **a ಮತ್ತು b ಗಳು $(G, *)$ ಯ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $a*x = b$ ಮತ್ತು $y*a = b$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರವು $(G\ *)$ ಯಲ್ಲಿದ್ದು ಅದು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

$a*x = b$ ...(1)

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$a \in G \therefore a^{-1} \in G$

ಈಗ, $a^{-1} * (a*x) = a^{-1}*b$ (1) ರಿಂದ

ಅಥವಾ $(a^{-1} * a) * x = a^{-1}*b$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $e*x = a^{-1} * b$ (ವಿಲೋಮಗುಣ)

ಅಥವಾ $x = a^{-1} * b$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = a^{-1}*b \in G$ ಯು $a*x = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. ಈಗ, ಈ ಪರಿಹಾರವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. x_1 ಮತ್ತು x_2 ಗಳು ಎರಡೂ ಅಂಶಗಳು $a*x = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $a * x_1 = b$, $a * x_2 = b$

$\therefore a*x_1 = a*x_2$

$\therefore a^{-1} *(a*x_1) = a^{-1}*(a*x_2)$

ಅಥವಾ $(a^{-1}*a) * x_1 = (a^{-1}*a) * x_2$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಂದರೆ, $e * x_1 = e * x_2$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$\therefore x_1 = x_2$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

ಅಂದರೆ, $a*x = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

$y *a = b$ ... (2)

$a \in G \quad \therefore a^{-1} \in G$

$\therefore (y*a) * a^{-1} = b*a^{-1}$

ಅಥವಾ $y* (a*a^{-1}) = b*a^{-1}$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

$y * e = b*a^{-1}$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

$y = b*a^{-1}$ (ಏಕದದ ಗುಣ)

$y = b * a^{-1} \in G$ ಯು $y * a = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಈ ಪರಿಹಾರವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, y_1 ಮತ್ತು y_2 ಎರಡೂ $y * a = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿರಲಿ.

$y_1 * a = b$ ಮತ್ತು $y_2 * a = b$

$\therefore y_1 * a = y_2 * a$

$\therefore (y_1 * a) * a^{-1} = (y_2 * a) * a^{-1}$

ಅಥವಾ $y_1 * (a * a^{-1}) = y_2 * (a * a^{-1})$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $y_1 * e = y_2 * e$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $y_1 = y_2$ (ಏಕದ ಗುಣ)

$\therefore y * a = b$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

5.5 ಉಪಸಂಕುಲಗಳು

$(G,*)$ ಯು ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿರಲಿ H ಎಂಬುದು G ಯ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ. $(H, *)$ ಕೂಡಾ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾದರೆ ಅದನ್ನು G ಯ *ಉಪಸಂಕುಲ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $G=\{1, -1, i, -i\}$ ಯು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$H=\{1, -1\}$ ಯು G ಯ ಉಪಗಣ ಮತ್ತು ಇದು ಕೂಡಾ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ H ಯು G ಯು ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

2. $(R,+)$ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

$I \subset R$

$(I, +)$ ಕೂಡಾ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ I ಯು R ನ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

3. $G=\{1, -1, i, -i\}$ ಗುಣಲಬ್ಧ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

$H=\{1, i\} \subset G$ ಆದರೆ H ಉಪಸಂಕುಲವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $i.i = i^2 = -1 \notin H$. ಅಂದರೆ, ಆವೃತ ಗುಣವು ನಿಜವಲ್ಲ.

ಸೂಚನೆ :

$(G, *)$ ಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ G ಮತ್ತು $\{e\}$ ಗಳನ್ನು ***ಅನುಚಿತ ಉಪಸಂಕುಲ***ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ

ಪ್ರಮೇಯ 1:

$(G, *)$ ಯ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣ H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

(i) $\forall\ a, b \in H, \quad a * b \in H$

(ii) $\forall\ a \in H, \quad a^{-1} \in H$

ಸಾಧನೆ:

I $(H, *)$ ಎಂಬುದು $(G, *)$ ಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, (i) $\forall\ a, b \in H,\ a * b \in H$

ಮತ್ತು (ii) $\forall\ a \in H,\ a^{-1} \in H$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$(H, *)$ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದೂ ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ ಗುಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\forall\ a, b \in H,\quad a * b \in H$$

$$\forall\ a \in H,\quad a^{-1} \in H$$

II $H \subset G$ ಮತ್ತು

(i) $\forall\ a, b \in H,\ a * b \in H$

(ii) $\forall\ a \in H,\ a^{-1} \in H$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈಗ, H ಒಂದು ಉಪ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ ಆವೃತ ಗುಣ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ ಗುಣಗಳು Hನಲ್ಲಿ ನಿಜ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(i) ರಲ್ಲಿ b ಯ ಬದಲಿಗೆ a^{-1} ನ್ನು ಬರೆದಾಗ

$$a * a^{-1} \in H$$

ಅಥವಾ $e \in H$

ಅಂದರೆ ಏಕದವು Hನಲ್ಲಿ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು G ಯ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. $H \subset G$ ಆದುದರಿಂದ ಇದು Hನ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ H ನಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲದ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪ ಸಂಕುಲವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 :

G ಯ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣ H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ ಅದು $\forall\ a, b \in H,\ a * b^{-1} \in H$ ಎಂಬ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

ಸಾಧನೆ:

I H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ.

ನಾವು $\forall\ a, b \in H,\ a * b^{-1} \in H$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$H \subset G$ ಆದುದರಿಂದ G ಯ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳು H ನಲ್ಲಿ ಇವೆ.

ಆದುದರಿಂದ $b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ (ವಿಲೋಮ ಗುಣ)

ಈಗ, $a \in H,\ b^{-1} \in H$

$\therefore\ a * b^{-1} \in H$ (ಆವೃತ ಗುಣ)

II $H \subset G$ ಮತ್ತು $\forall\ a, b \in H,\ a * b^{-1} \in H$ ಇರಲಿ.

ನಾವು H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $a * b^{-1} \in H\ \forall\ a, b \in H$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ b ಯ ಬದಲು a ನ್ನು ಬರೆದಾಗ

$a * a^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$

ಅಂದರೆ, ಏಕದವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ.

$a * b^{-1} \in H$ ಇದರಲ್ಲಿ a ಯ ಬದಲು e ಬರೆದಾಗ

$e * b^{-1} \in H \therefore\ b^{-1} \in H$

ಅಂದರೆ, ವಿಲೋಮಗುಣ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ.

$a * b^{-1} \in H$ ಇದರಲ್ಲಿ b ಯನ್ನು b^{-1} ನಿಂದ ಬದಲಿಸಿದಾಗ

$a * (b^{-1})^{-1} \in H$

ಅಥವಾ $a * b \in H$

ಅಂದರೆ ಆವೃತ ಗುಣವು ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿದೆ. $H \subset G$ ಆದುದರಿಂದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು H ನಲ್ಲೂ ನಿಜವೆನಿಸಿದೆ. ಅಂದರೆ, H ನಲ್ಲಿ G ಯ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳೂ ತೃಪ್ತಿಗೊಂಡಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ $(H,*)$ ಎಂಬುದು $(G,*)$ ಯ ಉಪಸಂಕುಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3....\}$

ಮತ್ತು $H = \{....-3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m...\}$

(m ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಆಗಿದ್ದರೆ, $(H,+)$ ಎಂಬುದು $(Z,+)$ ನ ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ $(Z, +)$ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ, $H \subset G$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$ab^{-1} \in H \ \forall \ a,b \in H$

ಆದರೆ H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗುವುದು.

$a = r\,m, \ b = s\,m$

ಎರಡು H ನ ಅಂಶಗಳಾಗಲಿ. ಇಲ್ಲಿ r ಮತ್ತು s ಎಂಬುವು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

ಇಲ್ಲಿ, $b = sm$ ಆದರೆ $b^{-1} = -sm$

ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯು ಸಂಕಲನ

$$\therefore ab^{-1} = r\,m - sm$$
$$= (r - s)m$$
$$= km$$

(ಕಾರಣ $r - s = k$ ಇನ್ನೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ)

ಅಂದರೆ, $ab^{-1} = km \in H$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(H, +)$ ಎಂಬುದು $(Z, +)$ ನ ಉಪಸಂಕುಲ.

2. $(G, \times)$ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಮತ್ತು $a \in G$

$H = \{......a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2 .....\}$

ಎಂಬುದು G ಯ ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $a \in G$ ಆದರೆ ಆವೃತ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ a ಯ ಎಲ್ಲಾ (ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಘಾತಗಳು G ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore H \subset G$

ಈಗ, $\forall A, B \in H$ ಗೆ $AB^{-1} \in H$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರೆ H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲವಾಗುವುದು.

$A = a^r,\ B = a^s$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore AB^{-1} = a^r (a^s)^{-1}$

$= a^r . a^{-s} = a^{r-s}$

$= a^k$ (ಇಲ್ಲಿ $r - s = k$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ)

ಅಂದರೆ, $AB^{-1} = a^k \in H$

ಆದ್ದರಿಂದ, H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲ.

3. $H = \{0,2,4\}_{\oplus \text{ mod } 6}$ ಮತ್ತು $G = \{0,1,2,3,4,5\}_{\oplus \text{ mod } 6}$

ಆದರೆ H ಎಂಬದು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$H \subset G$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈಗ

$\forall a,b \in H$ ಗೆ $ab^{-1} \in H$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರೆ H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಪಗಣದಲ್ಲಿ, $\oplus$ mod 6 ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ

$(0)^{-1} = 0$, $(2)^{-1} = 4$ ಮತ್ತು $(4)^{-1} = 2$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಾದ $a, b \in H$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$a = 0, \quad b = 2$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 0+4 = 4 \in H$

$a = 0 \quad b = 4$ ಆದಾಗ $ab^{-1} = 0+2 = 2 \in H$

$a = 0 \quad b = 0$ " $ab^{-1} = 0+0 = 0 \in H$

$a = 2 \quad b = 0$ " $ab^{-1} = 2+0 = 2 \in H$

$a = 2 \quad b = 2$ " $ab^{-1} = 2+4 = 0 \in H$

$a = 4 \quad b = 0$ " $ab^{-1} = 4+0 = 4 \in H$

$a = 4 \quad b = 2$ " $ab^{-1} = 4+4 = 2 \in H$

$a = 4 \quad b = 4$ " $ab^{-1} = 4+2 = 0 \in H$

ಇಲ್ಲಿ, $a \oplus^{mod\,6} b^{-1}$ ಯನ್ನು $a \; b^{-1}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

$\therefore \; ab^{-1} \in H \quad \forall \; a, b \in H$

ಆದ್ದರಿಂದ, H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲ

5.6 ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು

(i) G ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$ ಆದಾಗ G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

$\therefore \; b^{-1} a^{-1} = a^{-1} b^{-1}$

$b^{-1} = x$ ಎಂದಿರಲಿ $a^{-1} = y$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $xy = yx$

ಆದುದರಿಂದ G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ.

(ii) G ಸಂಕುಲದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ ಅದರ ವಿಲೋಮವೇ ಆಗಿದ್ದರೆ G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$a, b \in G$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore a = a^{-1}$ ಮತ್ತು $b = b^{-1}$

ಏಕೆಂದರೆ, G ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವು ಅದರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $a, b \in G \Rightarrow ab \in G$

$\therefore ab = (ab)^{-1}$ ... (1)

ಆದರೆ $(ab)^{-1} = b^{-1}\ a^{-1}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$(ab)^{-1} = ba$ ... (2)

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$ab = ba$

ಆದ್ದರಿಂದ G ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ

(iii) G ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿ $a^{-1} = a$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಂಶ $a \neq e$ ಇರುತ್ತದೆ.

G ಯಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಷ್ಟು ಅಂಶವಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದು $2n$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇದರಲ್ಲಿ n ಅಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಉಳಿದ n ಇವುಗಳ ವಿಲೋಮ ಅಂಶಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ n ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ, $e^{-1} = e$ ಆದುದರಿಂದ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ $(2n-1)$ ಅಂಶಗಳಿವೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಆಗ G ಯಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಸವಾಯಿತು. ಆದುದರಿಂದ G ಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಇನ್ನೊಂದು ಅಂಶ $a \neq e$ ಇರಬೇಕು. ಅದು $a^{-1} = a$ ಎಂದಾಗಬೇಕು. ಆಗ G ಯಲ್ಲಿ ಅಂಶಗಳು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟಾಗುತ್ತವೆ.

(iv) $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $a*a = e, b*b = e, c*c = e$ ....

ಅಥವಾ $a^2=e, b^2=e, c^2=e$ ......

ಆದರೆ G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $a \in G, b \in G$, $\therefore$ $ab \in G$

$\therefore\ (ab)^2 = e$

ಅಥವಾ $(ab)(ab) = e$

ಅಥವಾ $a(ba)b = e$

ಅಥವಾ $aa(ba)bb = a\,e\,b$

$a^2(ba)b^2 = ab$

$e\,(ba)\,e = ab$ (ಕಾರಣ $a^2 = e, b^2 = e$)

ಅಥವಾ $ba = ab$

ಆದ್ದರಿಂದ, G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

(v) ಸಂಕುಲ G ಯಲ್ಲಿ $(ab)^2 = a^2b^2\ \forall\ a, b \in G$ ಆದರೆ G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $(ab)^2 = a^2b^2$

ಅಥವಾ $(ab)(ab) = (aa)\ (bb)$

$a(ba)b = a(ab)\ b$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಥವಾ $ba = ab$ (ನಿರಸನ ನಿಯಮಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ, G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ.

(vi) G ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯುವಾದರೆ $(ab)^2 = a^2\,b^2\ \forall\ a, b \in G$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $(ab)^2 = (ab)(ab)$

$= a(ba)b$

$= a\,(ab)\,b$ ⋅(ಕಾರಣ G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ: $ab=ba$)

$= (aa)\,(bb)$ (ಸಹವರ್ತನೀಯ ಗುಣ)

ಅಂದರೆ, $(ab)^2 = a^2b^2$

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ $a*b$ ಅನ್ನು ab ಎಂದು ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

(vii) $(G,*)$ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ 2 ಅಥವಾ 3 ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ ಅದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(1) G ಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಅಂಶ ಏಕದವಾಗಿರಬೇಕು .

$\therefore$ $G=\{a,e\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

*	a	e
a	a*a	a
e	a	e

$a*a = a$ ಅಥವಾ e ಆಗಿರಬೇಕು.

$a*a = a$ ಆದರೆ $a=e$, ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$\therefore$ $a*a = e$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಈಗ, ಕೋಷ್ಟಕವು ಈ ಮುಂದಿನ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ:

*	a	e
a	e	a
e	a	e

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನಕರ್ಣದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅಂಶಗಳಿವೆ.

ಇದರಿಂದ G ಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(2) G ಯಲ್ಲಿ 3 ಅಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಅಂಶ e ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $G=\{e, a, b\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a*a	a*b
b	b	b*a	b*a

ಈಗ $a*b \neq a$ ಏಕೆಂದರೆ $a*b = a$ ಆದರೆ ನಿರಸನ ನಿಯಮದಿಂದ $b=e$ ಆಗುತ್ತದೆ;

ಇದೇ ರೀತಿ, $a*b \neq b$

ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$\therefore$ $a*b = e$

ಹಾಗೆಯೇ, $b*a = e$ ಆಗುತ್ತದೆ

$\therefore\ a^{-1} = b$ ಮತ್ತು $b^{-1} = a$

ಈಗ $a*a \neq e$

ಏಕೆಂದರೆ, $a * a = e$ ಆದರೆ $a^{-1}=a$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಏಕೆಂದರೆ, $a * a = a$ ಆದರೆ $a=e$; ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹಾಗೆಯೇ, $a * a \neq a$

$\therefore\ a * a = b$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $b*b = a$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

ಇದರ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಒಂದೇ ಅಂಶಗಳಿರುವ ಕಾರಣ ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 5

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ.

(i) Nನಲ್ಲಿ $a*b = a+5b$

(ii) Zನಲ್ಲಿ $a*b = a+b+1$

(iii) N ನಲ್ಲಿ $a*b = \dfrac{a+3b}{a-5b}$

(iv) Rನಲ್ಲಿ $a*b = \dfrac{ab}{5}$

(v) Rನಲ್ಲಿ $a*b = \sqrt{a^2+b^2}$

(vi) Rನಲ್ಲಿ $a*b = \sqrt{a^2-b^2}$

2. (i) Rನಲ್ಲಿ $a*b=\dfrac{ab}{7}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ii) R ನಲ್ಲಿ $a*b=3a-5b+7ab$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತನೀಯವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

(iii) Z ನಲ್ಲಿ $a*b = a+b+5$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇದರ ಏಕದ ಮತ್ತು a ಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) Z ನಲ್ಲಿ $a*b = a+b-1$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇದರ ಏಕದವನ್ನು ಮತ್ತು 4^{-1}ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(v) ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಸಮೂಹ S_3 ಯಲ್ಲಿ $S_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ ಆದರೆ S_1^{-1}ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(vi) $f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ ಆದರೆ $f.g$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(vii) $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ ಆದರೆ $\alpha . \beta$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(viii) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣ Zನ ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ $*$ನ್ನು $a*b=a+b+2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದರೆ ಅದರ ಏಕದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ix) ಗುಣಾಕಾರ (mod 10)ರ ಸಂಕುಲ $G = \{1,3,7,9\}$ನಲ್ಲಿ 3ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(x) $G=\{1, -1, i, -i\}$ ಸಂಕುಲದ ಅನುಚಿತ ಉಪಸಂಕುಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

(xi) $G=\{1,5,7,11\}, \times^{mod\ 12}$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $5^{-1}+7^{-1}+11^{-1}$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xii) ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ '*' ಪರಿಕ್ರಿಯೆ $a*b=\frac{ab}{2}$ ಆದಾಗ ಅದರ ಏಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xiii) ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ $a*b=\frac{ab}{7}$ ಆದಾಗ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯು ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(xiv) Q ಗಣದ ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ * ಅನ್ನು $a*b=\frac{ab}{4}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದರೆ ಏಕದವನ್ನು ಮತ್ತು 8ರ ಅನುಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xv) $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ a,b,c,d ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(a*b^{-1}*c^{-1}*d)^{-1}=?$

(xvi) G ಯು ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲವಾದರೆ $(a^{-1}b^{-1}c)^{-1}=?$

(xvii) $G=\{1,3,4,5,9\} \times_{mod\ 11}$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ 5 ರ ವಿಲೋಮವೇನು?

(xviii) ಶೂನ್ಯರಹಿತ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $a*b=\frac{ab}{3}$ ಆಗಿದ್ದು $2*x*5=10$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(xix) Z ಗಣದ ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ * ಅನ್ನು $a*b=a+b+5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದರೆ ಏಕದವೇನು?

(xx) $\{Z_6, +mod\ 6\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ $2+4^{-1}+3^{-1}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $G=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ ಆದಾಗ ಈ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

4. Gಯು ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

5. Gಯು ಎಲ್ಲಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

6. $Q-\{0\}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

7. $G = \{....2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2, 2^{2}...\}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. $Z = \{a+ib \mid a,b \in R\}$ ಈ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. $G = \{a+b\sqrt{2}, a,b \in Q\}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. ಎಲ್ಲಾ $m \times n$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಗಣವು (ಮಾತೃಕೆಗಳ ಅಂಶಗಳು, ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆದಲ್ಲಿ) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $G = \{(\cos\theta + i\sin\theta) \mid \theta \in R\}$ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $Q-\{1\}$ಗಣದಲ್ಲಿ $a*b = a+b+ab$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇದು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

ಗಣವು ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\oplus$ mod 6

(ii) $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\oplus$ mod 6

(iii) $G = \{1, 2, 3, 4\}$, $\otimes$ mod 5

(iv) $G = \{0, 3, 6, 9\}$, $\oplus$ mod 12

(v) $G = \{1, 5, 7, 11\}$, $\otimes$ mod 12

(vi) $G = \{1, 2, 3\}$, $\otimes$ mod 4

(vii) $G = \{0\}$, +

(viii) $G = \{1\}$, $\times$

15. $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $a^2 = a$ ಆದರೆ $a = e$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $(G, +)$ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ $-(-a) = a \ \forall\, a \in G$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. G ಯು ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು, H ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನವು ದ್ವಿಮಾನಕ್ರಿಯೆ.

18. $G = \{\ldots.\ 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, 2^{2} \ldots..\}_{\times}$
$H = \{1, 2, 2^2, 2^3 \ldots\}_{\times}$ ಆದರೆ H ಎಂಬುದು G ಯ ಉಪಸಂಕುಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

19. $G = \{1, -1, i, -i\}_{\times}$ ಸಂಕುಲದ ಉಪಸಂಕುಲಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

20. $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}_{\oplus \text{mod} 6}$ ಸಂಕುಲದ ಉಪ ಸಂಕುಲಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ:

(i) $H_1 = \{0, 3\}$ (ii) $H_2 = \{0, 2, 5\}$

21. $G = \{3^n | n$ ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ (ಅಬಿಲಿಯನ್) ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 6

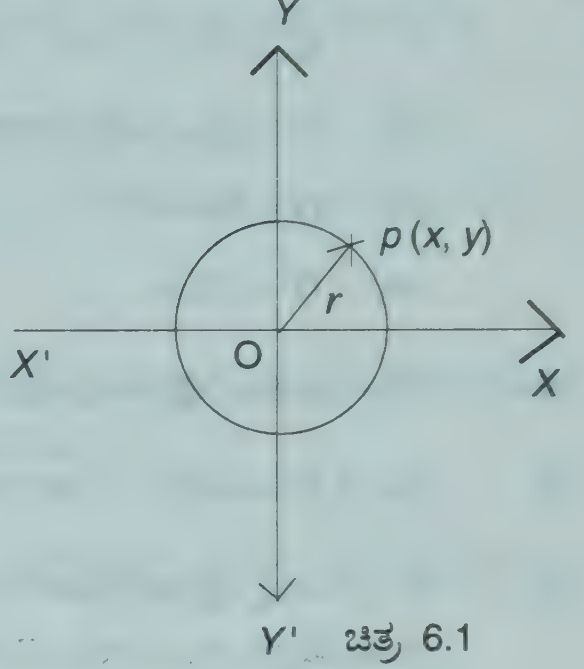
ವೃತ್ತಗಳು

6.1.1 ವಿವರಣೆ:

ದತ್ತಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು ವೃತ್ತವೆನಿಸುವುದು.

6.1.2 ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

(i) **ಮೂಲಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರ:**



ಚಿತ್ರ 6.1

$O(0,0)$ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, r ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. $P(x, y)$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 6.1).

P ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಪಥದ ನಿಬಂಧನೆ $OP = r$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $OP^2 = r^2$

ಅಥವಾ $\boxed{x^2+y^2 = r^2}$

ಇದು, ಮೂಲಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

(ii) **$C(h,k)$ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, r ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ**

$C(h,k)$ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, r ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 6.2).

$P(x,y)$ ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

ಬಿಂದು ಪಥದ ನಿಬಂಧನೆ:

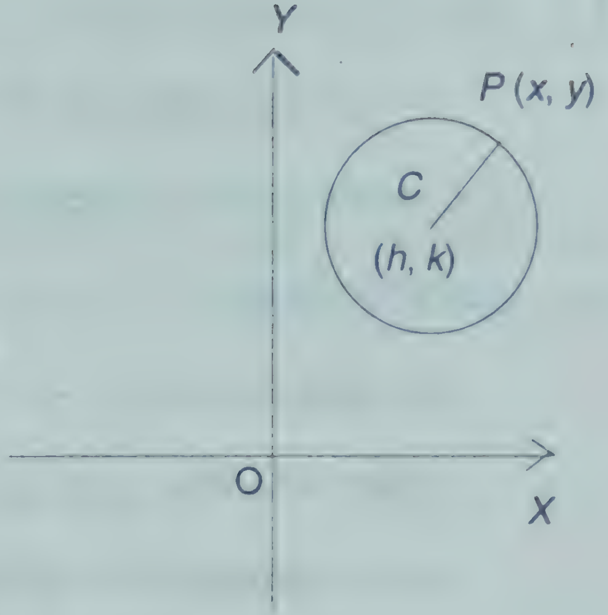
$\cdot\ CP = r$

ಅಥವಾ $CP^2 = r^2$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

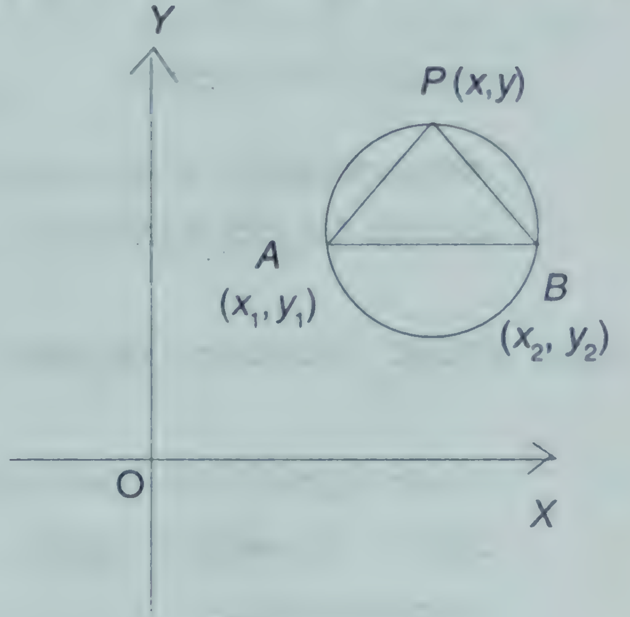
ಇದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.



ಚಿತ್ರ 6.2

6.1.3 (x_1,y_1) ಮತ್ತು (x_2,y_2) ಗಳು ವ್ಯಾಸವೊಂದರ ತುದಿಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

AB ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳು (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2,y_2)ಆಗಿರಲಿ. $P(x,y)$ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 6.3) .



ಚಿತ್ರ 6.3

ಚಿತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$APB = 90^o$

(ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನ)

ಆದ್ದರಿಂದ

$(AP$ ಯ ಓಟ$) \times (PB$ ಯ ಓಟ$) = -1$

ಅಥವಾ $$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$$

ಅಥವಾ $$\boxed{(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0}$$

ಇದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

6.1.4. ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

ಎಂಬ ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು

$$(x^2 + 2gx)+(y^2 + 2fy) = -c$$

ಅಥವಾ $(x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = -c + g^2 + f^2$

ಅಥವಾ $(x+g)^2+(y+f)^2 = (g^2+f^2-c)$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು

$$(x + g)^2 + (y + f)^2 = (\sqrt{g^2 + f^2-c})^2$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $(-g, -f)$ ಎಂಬುದು ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವನ್ನು ಮತ್ತು $\sqrt{g^2+g^2-c}$ ಎಂಬುದು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ಲಕ್ಷಣಗಳು

1. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಎಂಬುದು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ. ಇದರಲ್ಲಿ x^2 ಮತ್ತು y^2 ನ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಐಕ್ಯಧಾತುವಾಗಿರುವುವು.

2. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $g=0$ ಆದಾಗ $x^2+y^2+2fy+c=0$ ಸಮೀಕರಣವು $y-$ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $(0, -f)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವಾಗಿವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

3. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $f=0$ ಆದಾಗ $x^2+y^2+2gx+c=0$ ಸಮೀಕರಣವು $x-$ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ $(-g, 0)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಾಗಿವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

4. ಅದೇ ರೀತಿ $c=0$ ಆದಾಗ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

5. $g^2 + f^2 - c$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ನೈಜವೃತ್ತವೆಂದೂ, ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಊಹ್ಯವೃತ್ತವೆಂದೂ, ಶೂನ್ಯವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವೃತ್ತವೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

6. ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸುವಾಗ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x^2 ಮತ್ತು y^2 ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು 1 (ಐಕ್ಯಧಾತು) ಆಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (2,3) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, 6 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (6)^2$$

ಅಥವಾ $x^2+y^2-4x-6y-23 = 0$

2. $2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y-2 = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$x^2 + y^2 + \frac{5x}{2} + \frac{3y}{2} - 1 = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು

$$(-g,-f) \equiv \left(\frac{-5}{4}, \frac{-3}{4}\right)$$

ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{g^2+f^2-c} = \left[\frac{25}{16}+\frac{9}{16}+1\right]^{1/2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

3. (4,2) ಮತ್ತು (–3,–5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳಾಗಿವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

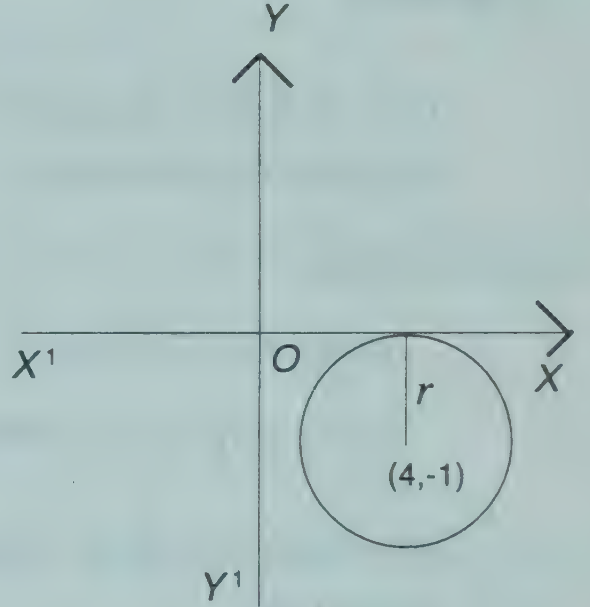
$$(x-4)(x+3)+(y-2)(y+5)=0$$

ಅಥವಾ $x^2+y^2-x+3y-22=0$.

4. (4,–1) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿವುಳ್ಳ ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೇಂದ್ರವು $(-g, -f)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $|f|$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $r=1$ (ಚಿತ್ರ 6.4).



ಆಗ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x-4)^2+(y+1)^2=(1)^2$$

ಅಥವಾ $x^2+y^2-8x+2y+16=0$

ಚಿತ್ರ 6.4

5. (–5,2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ, y – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು $(-g, -f)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

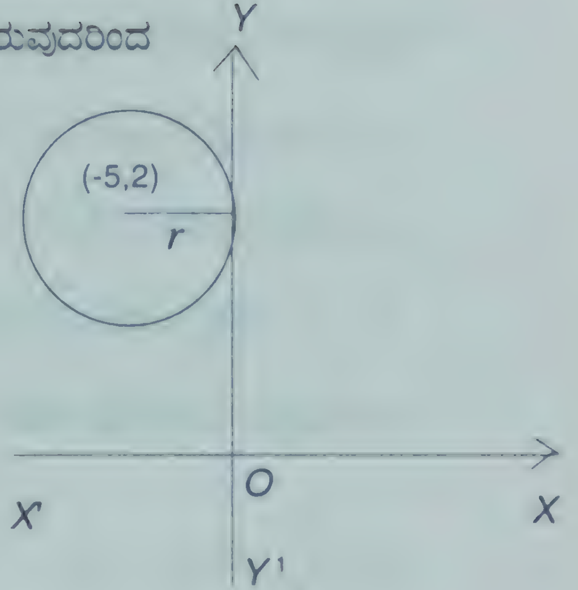
y–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $|g|$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 6.5).

ಆದ್ದರಿಂದ $r=1$

ಆಗ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = (5)^2$

$x^2 + y^2 + 10x - 4y + 4=0$



ಚಿತ್ರ 6.5

6. $(2,-3)$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $3x-4y-8=0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಜ್ಯ CP ಯು ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.6

ಸೂತ್ರದಿಂದಾಗಿ $\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\dfrac{3(2) - 4(-3) - 8}{\sqrt{9+16}} = 2$ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

7. $(2,0)$, $(3,0)$ ಮತ್ತು $(0,3)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

ಇದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ವೃತ್ತವು (2,0), (3,0) ಮತ್ತು (0,3) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$4 + 0 + 4g + c = 0$ ಅಥವಾ $4g + c = -4$

$9 + 0 + 6g + c = 0$ ಅಥವಾ $6g + c = -9$

$0 + 9 + 6(0) + 6f + c = 0$ ಅಥವಾ $6f + c = 0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ

$g = \frac{-5}{2}$ ಮತ್ತು $c = 6$

ಕೊನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $f = \frac{-5}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, (1) ರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 6 = 0.$

8. ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು (5,0) ಮತ್ತು (0,5) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು

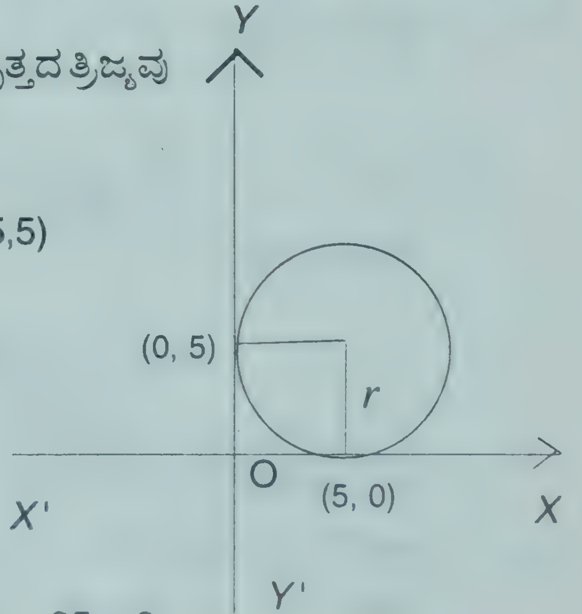
$r = |g| = |f|$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು (5,5) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 6.7).

ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$



ಚಿತ್ರ 6.7

9. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$x^2+y^2+2x+4y+1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-4x-4y-1=0$

ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$C_1 \equiv (-1, -2)$ ಮತ್ತು $r_1 = \sqrt{1+4-1} = 2$

$C_2 \equiv (2, 2)$ ಮತ್ತು $r_2 = \sqrt{(4+4+1)} = 3$

$\therefore C_1C_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (-22)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$\therefore C_1C_2 = r_1+r_2$

ಅಂದರೆ, 5 ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

10. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

$x^2+y^2-2x+6y+6 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-5x+6y+15=0$

ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು:

$C_1 \equiv (1, -3),\ r_1 = \sqrt{1+9-6} = 2$

$C_2 \equiv (5/2, -3)\ \ r_2 = \sqrt{25/4+9-15} = 1/2$

$$C_1C_2 = \sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+(-3+3)^2} = \frac{3}{2},\ r_1-r_2 = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$C_1C_2 = r_1-r_2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ವೃತ್ತಗಳು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

I ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಯಿರಿ.

	ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು	ತ್ರಿಜ್ಯ
(i)	(3, -5)	4
(ii)	(0,-5)	6

II ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2(x^2+y^2) + 6x-10y+9 = 0$

(ii) $5x^2+5y^2+4x-8y = 16$

III 1. (1, 1) , (2, -1) ಮತ್ತು (3, 2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x^2+y^2-8x+2y = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು $4x-y = 17$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $x+y=6$ ಮತ್ತು $x+2y=4$ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿದ್ದು, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 10 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿದ್ದರೆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ x ಮತ್ತು y ರೇಖಾಂತರಗಳು ಧನದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಮತ್ತು 6 ಮಾನಗಳಿಷ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. (6, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $5x+12y=3$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. (1, 2) ಮತ್ತು (2,4) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $x^2+y^2+4x-4y+4 = 0$ ವೃತ್ತವು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $x^2+y^2-2x+6y+6 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-5x+6y+15 = 0$ ವೃತ್ತಗಳು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

9. $x^2+y^2-4x-6y-12 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+6x+18y+26 = 0$ ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $x - 0$, $y = 0$ ಮತ್ತು $x = c$ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. (1, 1), (–2, 2), (–2, –8) ಮತ್ತು (–6, 0) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕವೃತ್ತಗತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. (5, 1) ಮತ್ತು (3, 4) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

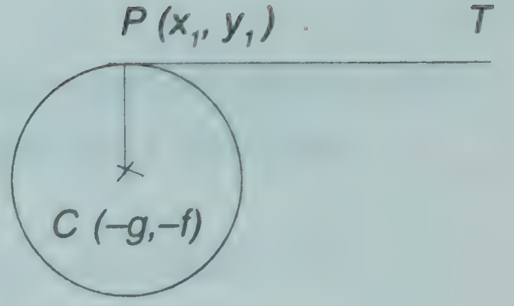
13. $3x+y = 15$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2+y^2-2x-4y-5 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕೆ ನಿಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವೇನು?

14. $x^2+y^2-4x-6y-12 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (–1, –1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಮತ್ತು 3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. (–1, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $x^2+y^2-4x+6y = 3$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ವೃತ್ತವು ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

6.2.1 ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು
$x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$
ಆ ಗಿರಲಿ. $P(x_1, y_1)$ ವೃತ್ತದ
ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 6.8

ಚಿತ್ರ 6.8ರ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ CP ಮತ್ತು PT ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿವೆ. CP ಯ ಓಟವು

$$\frac{y_1+f}{x_1+g}$$

ಆಗ PT ಯ ಓಟವು

$$-\frac{x_1+g}{y_1+f}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y-y_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

ಅಥವಾ $(y-y_1)(y_1+f) = -(x_1+g)(x-x_1)$

ಅಥವಾ $xx_1+yy_1+gx+fy = x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1$

ಈಗ (gx_1+fy_1+c) ಅನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿದಾಗ

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c = x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

ಅಥವಾ $\boxed{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0}$

ಏಕೆಂದರೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯ ಉಕ್ತಿಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದು.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ.

6.2.2 $y = mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ

$y = mx+c$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ $x^2+y^2=a^2$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x^2+(mx+c)^2 = a^2$ ಅಥವಾ $(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-a^2 = 0$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದು x–ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು $y = mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಏಕಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ನೈಜವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ:

$$4m^2c^2-4(c^2-a^2)\ (1-m^2) = 0$$

ಅಥವಾ $a^2(1+m^2) = c^2$

ಅಥವಾ $\boxed{c = \pm a\sqrt{1+m^2}}$

ಇದು $y = mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2+y^2 = a^2$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ.

ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದಾಗಿ

$$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2} \qquad \text{..... (1)}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ವೃತ್ತ $x^2+y^2= a^2$ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಓಟ m ಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತ ಹೋದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಯುಗ್ಮಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ವೃತ್ತವು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ, $x^2+y^2=a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಗಣ (1) ರ "ಎನ್ವಲಪ್" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

1. $x^2+y^2-6x-8y=0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. x – ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ $45°$ ಗಳಷ್ಟು ಬಾಗುವುಳ್ಳ $x^2+y^2-6x-4y+5=0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಸುಳುಹು: ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವು, $\tan 45° = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y=x+c$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ).

3. $(3, -3)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2+y^2+8x+4y-5=0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x^2+y^2=5$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ $(1, -2)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕವು $x^2+y^2-8x+6y+20=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮರೇಖಾಂತರವುಳ್ಳವುಗಳಾದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $3x-4y-7=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಇರುವ $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $7y-x=5$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2+y^2-5x+5y=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.3 ಒಂದು ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಎಂದಿರಲಿ.

$P(x_1, y_1)$ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 6.9).

$C(-g, -f)$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು PT ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ.

CT ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$CT = \sqrt{g^2+f^2-c}$

CT ಯು PT ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

PCT ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$PC^2 = PT^2+CT^2$

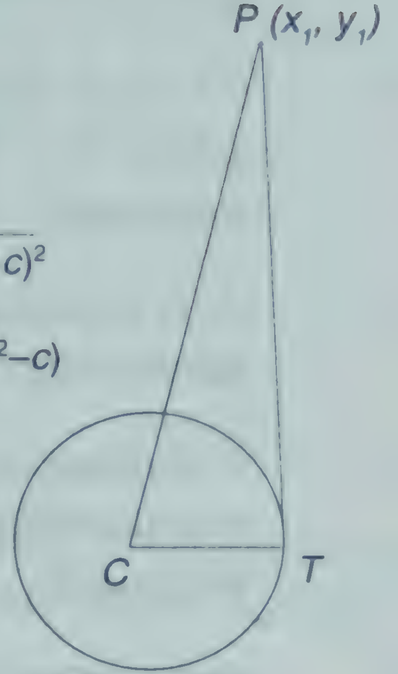
ಅಂದರೆ, $(x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 = PT^2+(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$

ಅಥವಾ $PT^2 = (x_1+g)^2 + (y_1+g)^2 -(g^2+f^2-c)$

$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$

ಆದ್ದರಿಂದ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ

$$\boldsymbol{PT = \sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}}$$



ಚಿತ್ರ 6.9

ಸೂಚನೆ: (i) (x_1, y_1) ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ *ಹೊರಗೆ* ಇದ್ದಲ್ಲಿ

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c > 0$

(ii) (x_1,y_1) ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ *ಮೇಲೆ* ಇದ್ದಲ್ಲಿ

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c = 0$

(iii) (x_1, y_1) ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c < 0$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.3

1. (–2, 1) (0, 0) (4, –3) ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x^2+y^2-5x+3y=0$ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ, ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಒಳಗೆ ಇರುವುವೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

2. (–1, 0), (0, 2) ಮತ್ತು (–2, 1) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3, $\sqrt{10}$ ಮತ್ತು $3\sqrt{3}$ ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. (4, 1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $2(x^2+y^2)-3x+4y+6=0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಸ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2+y^2+2gx+2fy+c_1=0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ $x^2+y^2+4x+3=0$ ಮತ್ತು $x^2y^2-6x+5=0$ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 1 : 2 ಆದರೆ, ಬಿಂದುಪಥವು ಒಂದು ವೃತ್ತವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ. ಆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.4.1 ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತ

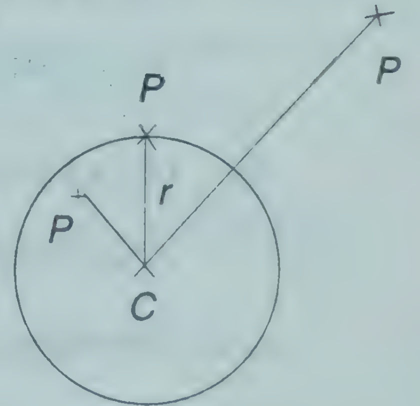
ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು C ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, CP^2-r P ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು (ಚಿತ್ರ 6.10).

(i) P ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ

$CP > r$, ಆಗ $CP^2-r^2 > 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಅದೇ ರೀತಿ P ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ

$CP < r$ ಆಗ $CP^2-r^2 < 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.10

(iii) P ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ $CP=r$ ಆಗುವುದು. ಆಗ $CP^2-r^2=0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತವು, ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ, ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುವಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಧನಾತ್ಮಕ, ಋಣಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

ಈಗ $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು $(-g, -f)$ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

ಆಗ $CP^2-r^2 = (x_1+g)^2+(y_1+f)^2- \sqrt{(g^2+f^2-c)}$

$$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

ಇದನ್ನು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತವೆನಿಸುವುದು.

6.4.2 ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಘಾತಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0 \quad ....(1)$$

ಮತ್ತು $$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0 \quad ....(2)$$

ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. (1) ಮತ್ತು (2) ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ P ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತವು ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2$$

ಅಥವಾ $$\boxed{2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+c_1-c_2 = 0}$$

ಇದು ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ.

ಸೂಚನೆ: (i) ಮೂಲಾಕ್ಷವು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ.

(ii) $S=0$ ಮತ್ತು $T= 0$ ಎಂಬುವು ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದ

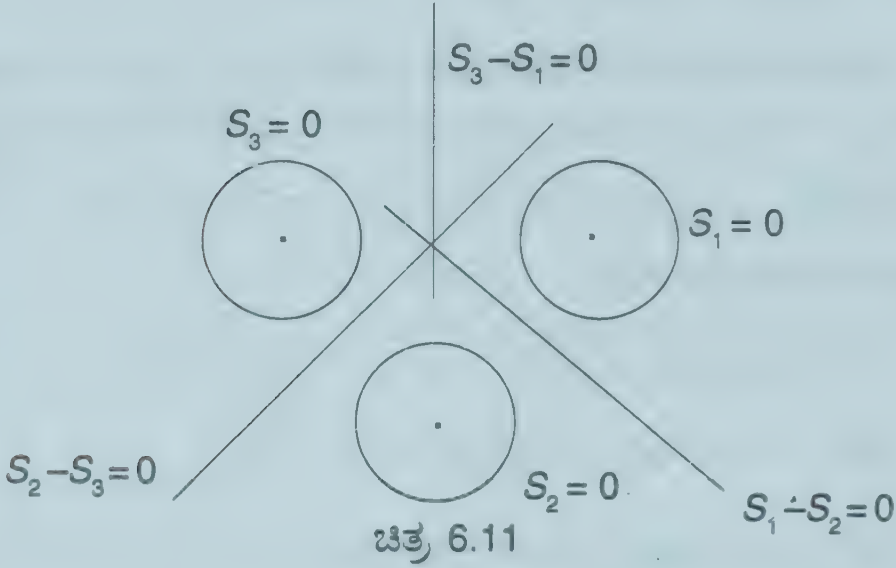
ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ

$$S - T = 0$$

ಎಂಬುದು ಅವುಗಳ *ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.*

6.4.3 ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ

ಏಕರೇಖಸ್ಥ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಲ್ಲದಿರುವ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಸಲ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಂತೆ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಮೂರು ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗುವುವು. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 6.11

ಸೂಚನೆ: ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವು ವೃತ್ತಗಳ ಹೊರಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮನಾಗಿರುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು.

ಸಾಧನೆ: ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$S \equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$$

ಮತ್ತು $T \equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$

ಆಗಿರಲಿ. ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು $S - T = 0$

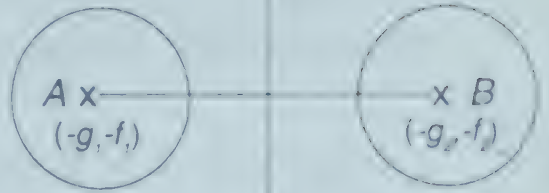
ಅಂದರೆ, $2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)+c_1-c_2=0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. A ಮತ್ತು B ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 6.12)

AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು $m_1=\dfrac{f_1-f_2}{g_1-g_2}$

ಮೂಲಾಕ್ಷ ಓಟವು $m_2=-\dfrac{g_1-g_2}{f_1-f_2}$

ಇದರಿಂದ $m_1\, m_2=-1$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.



(ಚಿತ್ರ 6.12)

ಆ ಕಾರಣ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದೆಂಬುದು ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ: (1) ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವುದು.

(2) ವೃತ್ತಗಳು ಛೇದಿಸಿದರೆ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ ಆಗಿರುವುದು.

(3) ಎರಡು ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದರ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

ಅಭ್ಯಾಸ – 6.4

1. $x^2+y^2+2x+4y-7 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-6x+2y-5 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

2. $2x^2+2y^2-x+5y-7 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+3x+4y-2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $x^2+y^2+2x+2y+1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-10x-6y+14 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x^2+y^2-6x-6y+4 = 0$, $x^2+y^2-2x-4y+3 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+2x+2y+1 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^2+y^2+4x+7 = 0$, $2x^2+2y^2+3x+5y+9 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+y = 0$ ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x^2+y^2-8x+4y+2 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+2x-6y+2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $x^2+y^2-4x-6y+12 = 0$ ಮತ್ತು $5(x^2+y^2)-8x-14y-32 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.5.1 ಲಂಬ ವೃತ್ತಗಳು

ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾದರೆ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

6.5.2 ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ

ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$ ಆಗಿರಲಿ.

ಚಿತ್ರ 6.13 ರ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$AC = \sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}$

ಮತ್ತು $BC = \sqrt{g_2^2+f_2^2-c}$

S T C A B

ಚಿತ್ರ 6.13

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಕೇಂದ್ರಗಳು

$A \equiv (-g_1, -f_1), B \equiv (-g_2, -f_2)$

ವೃತ್ತಗಳು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ ಮತ್ತು ಇವುಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈಗ ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ

$AB^2= AC^2+BC^2$

ಅಂದರೆ, $(-g_1+g_2)^2+(-f_1+f_2)^2 = g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2$

ಅಥವಾ $\boxed{2g_1g_2+2f_1f_2 = c_1+c_2}$

ಇದು ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದೆನಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ.

ಸೂಚನೆ: ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವು ಆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-6x+4y-19=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$(-g_1, -f_1) \equiv (-1, 2)$ ಮತ್ತು $(-g_2, -f_2) \equiv (3, -2)$

ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆನಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆ

$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$

ಇಲ್ಲಿ $2g_1g_2+2f_1f_2 = 2(1)(-3)+2(-2)(2) = -6-8 = -14$ ...(1)

ಮತ್ತು $c_1+c_2= 5-19 = -14$ ..... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳೆಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

2. $x^2+y^2-x+22y+3=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+7x+6y+c=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವೃತ್ತಗಳಾದಲ್ಲಿ 'c' ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $2g_1g_2+2f_1f_2 = c_1+c_2$ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ

$$2(-1/2)(7/2)+2(11)(3) = 3+c$$

ಅಥವಾ $c = \dfrac{119}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

3. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x^2+y^2+8x+4y-6=0$ ಹಾಗೂ $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಈ ವೃತ್ತವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ $c = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ವೃತ್ತವು ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ

$2g(4)+2f(2)=c-6$ ಮತ್ತು

$2g(1)+2f(3)= c+1$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $c = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$8g+4f=-6$

$2g+6f=1$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ $f = 1/2$ ಮತ್ತು $g = -1$ ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2+y^2-2x+y=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

4 $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$, $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

$$x^2+y^2+2x+4y+1=0 \qquad \text{..... (1)}$$
$$2x^2+2y^2+6x+8y-3=0 \qquad \text{..... (2)}$$
$$x^2+y^2-2x+6y-3=0 \qquad \text{..... (3)}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು $x = \frac{5}{2}$

(1) ಮತ್ತು (3) ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು $2x-y+2=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ ಮೂಲಾಕ್ಷಕೇಂದ್ರವು $\left(\frac{5}{2}, 7\right)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಮೂಲಾಕ್ಷಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಯಾವುದೇ ದತ್ತವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{\frac{25}{4} + 49 + 5 + 28 + 1} = \sqrt{\frac{357}{4}}$

ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x - 5/2)^2 + (y - 7)^2 = \frac{357}{4}$$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 5x - 14y + \frac{25}{4} + 49 = \frac{357}{4}$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 5x - 14y - 34 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 6.5

1. $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-2y-15=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

   (i) $x^2+y^2+5x-2y+4=0$

   (ii) $x^2+y^2+2x+4y+1=0$

   (iii) $x^2+y^2+4x+4y-1=0$

3. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $x^2+y^2-8y+12=0$ ಹಾಗೂ $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. (2, 3) ಮತ್ತು (5, 6) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಗಳುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^2+y^2-6y+1=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-4y+1=0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು $3x+4y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+6x-4y+4=0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು $4x-3y+3=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $x^2+y^2+4x+6y+7=0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರವು (3, 4) ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.6.1 ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ

ವೃತ್ತಗಳ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅಂತಹ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು *ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ* (ಕೋಆಕ್ಸಿಯಲ್ ಸಿಸ್ಟಂ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$S_1 = 0$ ಮತ್ತು $S_2 = 0$ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ $S_1+\lambda_1 S_2=0$ ಮತ್ತು $S_1+\lambda_2 S_2=0$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಿ ಮತ್ತು $\lambda_1 \neq -1$, $\lambda_2 \neq -1$ ಹಾಗೂ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ಇರಲಿ.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರಮಾಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

$$\frac{S_1+\lambda_1 S_2}{1+\lambda_1} = 0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{S_1+\lambda_2 S_2}{1+\lambda_2} = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು

$$\frac{S_1+\lambda_1 S_2}{1+\lambda_1} - \frac{S_1+\lambda_2 S_2}{1+\lambda_2} = 0$$

ಅಥವಾ $(\lambda_2-\lambda_1)(S_1-S_2) = 0$

ಆದರೆ, $\lambda_2-\lambda_1 \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $S_1-S_2 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದೇ ಮೂಲಾಕ್ಷವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಇದು ಎಲ್ಲ ಜೊತೆ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

6.6.2 ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣ

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರಲಿ. y–ಅಕ್ಷವು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವಾಗಿರಲಿ.

ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷದ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಸಮೀಕರಣವು (f=0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

$x^2+y^2+2gx+c=0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$x^2+y^2+2g_1x+c_1=0$

ಮತ್ತು $x^2+y^2+2g_2x+c_2=0$

ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು

$2x(g_1-g_2)+c_1-c_2=0$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗನುಗುಣವಾಗಿ ಮೂಲಾಕ್ಷವು $x=0$ ಎಂದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $c_1-c_2=0$

ಅಥವಾ $c_1=c_2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ***ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ***ಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\boxed{x^2+y^2+2gx+c=0}$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ 'g'ಯು ಚರ ಮತ್ತು 'c' ಯು ಸ್ಥಿರ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸೂಚನೆ : $U\equiv lx+my+n=0$ ಮೂಲಾಕ್ಷವಾಗಿಯೂ $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ಸಹ ಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವೃತ್ತವಾದಲ್ಲಿ, ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $S+\lambda U=0$ ಎಂದಾಗುವುದು.

6.6.3 ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳು

$x^2+y^2+2\lambda x+c=0$

ಸಮೀಕರಣವು λದ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $\lambda = \pm\sqrt{c}$ ಆದಾಗ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$x^2+y^2+2\sqrt{c}\,x+c=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-2\sqrt{c}\,x+c=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

$$(x+\sqrt{c})^2+y^2 = 0$$

ಹಾಗೂ $(x-\sqrt{c})^2+y^2 = 0$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಶೂನ್ಯವೆಂದು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳು **$(-\sqrt{c}, 0)$** ಮತ್ತು **$(\sqrt{c}, 0)$** ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಈ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ *ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು* ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ: (i) 'c'ಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳು ನೈಜವಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಹಾಗೂ ವೃತ್ತಗಳು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) 'c' ಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳು ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

6.6.4 ಲಂಬ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ

ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯು

x-ಅಕ್ಷವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು y–ಅಕ್ಷವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2+y^2+2\lambda x+c=0 \qquad \dots (1)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2+y^2+2gx+2fy+k=0 \qquad \dots (2)$$

ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಲಂಬವೃತ್ತಗಳ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಪಡಿಸಿದಾಗ

$$2\lambda g = c+k$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು λದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ.

λ_1 ಮತ್ತು λ_2 ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$2\lambda_1 g = c+k$$

ಮತ್ತು $2\lambda_2 g = c+k$

ಅಥವಾ $2(\lambda_1-\lambda_2)\, g=0$

ಆದರೆ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $g=0$ ಮತ್ತು $k=-c$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ($g=0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ)

$$x^2+y^2+2fy-c=0 \qquad \text{... (3)}$$

ಎಂದು ಪರಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಸೂಚನೆ : (i) ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ fನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (1) ರ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) ಲಂಬ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (3) ರ ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳು $(0, \pm\sqrt{c})$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^2+y^2+2x+4y+7=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+4x+2y+5=0$ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿತವಾದ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೂಲಾಕ್ಷ ಸಮೀಕರಣವು [$S_1-S_2=0$ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ]

$$U \equiv x-y-1=0$$

ಆಗ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಮೀಕರಣವು

$$x^2+y^2+4x+2y+5+\lambda(x-y-1)=0 \quad [S+\lambda U=0]$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು

$$\sqrt{\left[\frac{(4+\lambda)}{2}\right]^2+\left[\frac{(2-\lambda)}{2}\right]^2-(5-\lambda)}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$\text{ತ್ರಿಜ್ಯ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\lambda^2+8\lambda}$$

ಈ ತ್ರಿಜ್ಯವು, $\lambda=0$ ಅಥವಾ $\lambda=-4$ ಆದಾಗ ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದು.

ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳು ಶೂನ್ಯತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳು $\equiv \left[\dfrac{-(4+\lambda)}{2}, \ -\dfrac{(2-\lambda)}{2}\right]$

ಅಂದರೆ, (–2, –1) ಮತ್ತು (0, –3) ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ.

2. $x^2+y^2+4x+3=0$, $x^2+y^2-6x+5=0$ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು $m:n$ ಆದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದು ಪಥವು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳು t_1 ಮತ್ತು t_2 ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $t_1^2 = x_1^2+y_1^2+4x_1+3$

ಮತ್ತು $t_2^2 = x_1^2+y_1^2-6x_1+5$

ಆದರೆ ದತ್ತ ಮೂಲಗಳಿಂದ t_1 ಮತ್ತು t_2ಗಳ ಪ್ರಮಾಣ

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{m}{n}$$

ಅಥವಾ $t_1^2 - \dfrac{m^2}{n^2} t_2^2 = 0$ ಆಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, $x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 + 3 - \dfrac{m^2}{n^2}(x_1^2 + y_1^2 - 6x_1 + 5) = 0$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು $P(x_1,y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ಮತ್ತು ಇದು $S_1+\lambda S_2=0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಕಾರಣ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ,

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 - \frac{m^2}{n^2}(x^2 + y^2 - 6x + 5) = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.6

1. $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+10x+12y+45=0$ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು 3:4 ಆದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿತವಾದ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x^2+y^2-6x-6y+4=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-2x-4y+3=0$

   (ii) $x^2+y^2+2x-6y=0$ ಮತ್ತು $2x^2+2y^2-10y+5=0$

   (iii) $x^2+y^2+x-5y+9=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-8x-2y-3=0$

3. ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮಿತಿ ಬಿಂದುವೊಂದು (2, 1) ಆಗಿದ್ದು, ಮತ್ತು ವೃತ್ತವೊಂದರ ಸಮೀಕರಣವು $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ ಆದರೆ ಮೂಲಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮಿತಿ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $(x-1)^2+(y-2)^2+\lambda(x^2+y^2+2x+5)=0$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು (1, 2) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಮಿತಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 7

ಶಂಕುಜಗಳು

7.1 ಶಂಕುಜಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಪೊಳ್ಳಾದ ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಸಮತಲವೊಂದರಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಶಂಕುಜಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಮತಲವು ಶಂಕುವಿನ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಶಂಕುಜವನ್ನು ವೃತ್ತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಶಂಕುವಿನ ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗಿನ ಸಮತಲದ ಬಾಗುವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವ ಮೂಲಕ ವಿವಿಧ ಶಂಕುಜ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು *ಪೆರಾಬೋಲಾ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತ* (ಎಲಿಪ್ಸ್) ಮತ್ತು *ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ* ಎಂದು ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ಶಂಕುಜವನ್ನು, ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವ ದೂರ ಮತ್ತು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಇರುವ ದೂರದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದು ಪಥವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

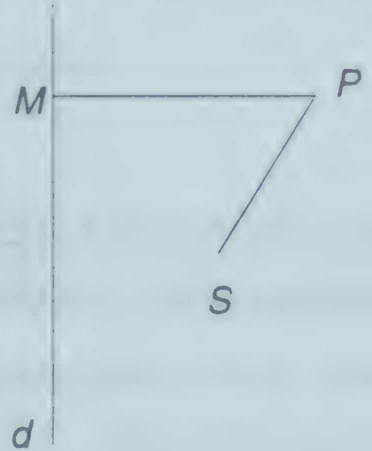
ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು *ನಾಭಿ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಚಾಲಕ (ಡೈರೆಕ್ಟ್ರಿಕ್ಸ್) ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೆವೆ. ಸ್ಥಿರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

P ಯಾವುದೆ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

S ಅನ್ನು ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ, d ಅನ್ನು ಚಾಲಕ ವೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 7.1).

PM ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. ಶಂಕುಜದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ,

$$\frac{SP}{PM} = e$$



ಚಿತ್ರ 7.1

'e' ಅನ್ನು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ (ಎಕ್ಸೆಂಟ್ರಿಸಿಟಿ) ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$e=1$ ಆದಾಗ, ಶಂಕುಜವನ್ನು *ಪೆರಾಬೋಲಾ*ವೆಂದು,

$e<1$ ಆದಾಗ, ಶಂಕುಜವನ್ನು *ದೀರ್ಘವೃತ್ತ*ವೆಂದು

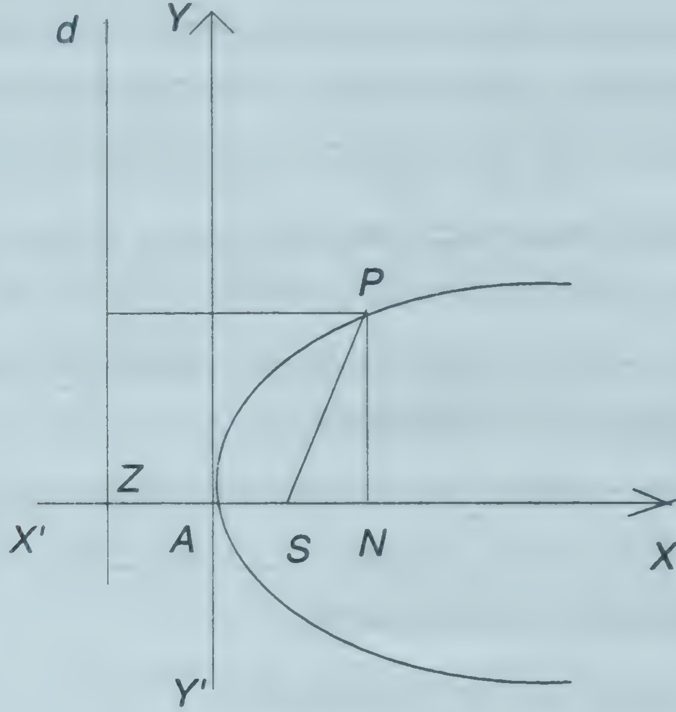
$e>1$ ಆದಾಗ ಶಂಕುಜವನ್ನು *ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ*ವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

7.2.1 ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ

ಯಾವ ಶಂಕುಜದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆಯೋ ಅಂತಹ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಪೆರಾಬೊಲಾವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$P(x, y)$ ಎಂಬುದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಈ ಬಿಂದುವು d ಚಾಲಕದಿಂದಲೂ, S ನಾಭಿಯಿಂದಲೂ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ.

PM ಅನ್ನು ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. S ಮುಖಾಂತರ SZ



ಚಿತ್ರ 7.2

ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. $SZ = a$ ಎಂದಿರಲಿ. A ಎಂಬುದು SZನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $SA = AZ = a$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 7.2).

A ಅನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು AX ಮತ್ತು AY ಅಕ್ಷಗಳು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ, AX ಅನ್ನು x–ಅಕ್ಷವೆಂದು, AY ಅನ್ನು y–ಅಕ್ಷವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. P ಯಿಂದ PN ಅನ್ನು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. Aನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(0, 0)$ ಮತ್ತು ನಾಭಿ S ಬಿಂದುವು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(a, 0)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಪೆರಾಬೊಲಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥದ ನಿಬಂಧನೆ

$$SP = PM$$

ಅಥವಾ $SP^2 = PM^2$

$$\text{ಅಂದರೆ, } (x-a)^2+y^2 = (x+a)^2$$

$$\text{ಅಥವಾ } x^2+a^2-2ax+y^2 = x^2+a^2+2ax$$

$$\text{ಅಥವಾ } \boxed{y^2 = 4ax}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ.

7.2.2 ಪೆರಾಬೊಲಾ $y^2 = 4ax$ ನ ಲಾಕ್ಷಣಿಕಗಳು

1. x ಮತ್ತು yಗಳಿಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಬಲಗಡೆಗೆ ಮುಚ್ಚಿರದ ಅನಂತ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವುದು.

2. AX ಅನ್ನು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಅಕ್ಷವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

3. ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಾಂಗವಾಗಿರುವುದು.

4. ಚಿತ್ರ 7.2ರಲ್ಲಿ A ಬಿಂದುವನ್ನು *ಶೃಂಗ*ವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (0, 0) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5. S ನಾಭಿಯು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(a, 0)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

6. d ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವು $x=-a$ ಎಂದಾಗುವುದು.

7.2.3 ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ

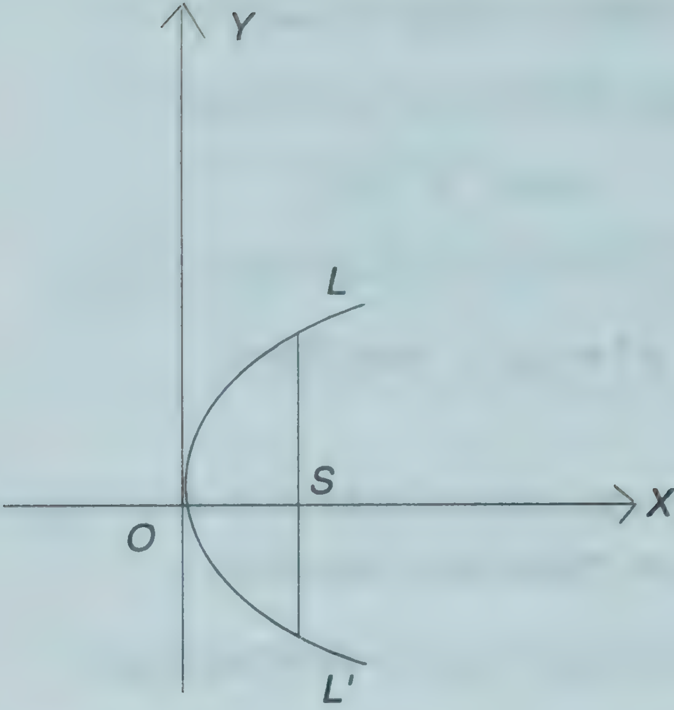
ಪೆರಾಬೊಲಾದ ನಾಭಿ ಮೂಲಕ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಜ್ಯಾ ಅನ್ನು *ನಾಭಿಲಂಬ* (ಲ್ಯಾಟಸ್ ರೆಕ್ಟಂ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 7.3 ರಲ್ಲಿ LSL' ನಾಭಿಲಂಬವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

L ಮತ್ತು L' ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (a, SL) ಮತ್ತು $(a, -SL)$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$L(a, SL)$ ಬಿಂದುವು $y^2=4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ $(SL)^2 = 4a.a$

ಅಥವಾ $SL= 2a$ ಆಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 7.3

ಆಗ ನಾಭಿಲಂಬ $LL' = 4a$ ಆಗುವುದು.

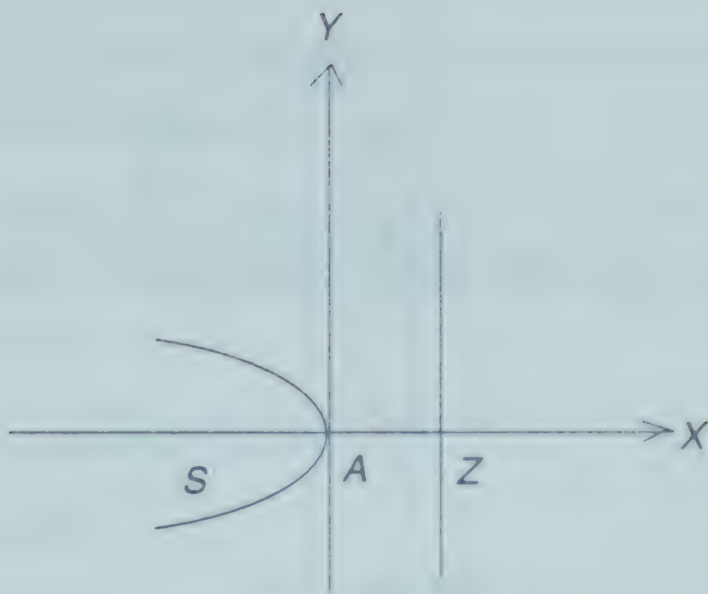
L ಮತ್ತು L'ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(a, +2a)$ ಮತ್ತು $(a, -2a)$ ಎಂದಾಗುವುವು.

ಸೂಚನೆ: ನಾಭಿ $(a, 0)$ ಮತ್ತು $P(x, y)$ ಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ನಾಭದೂರವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. P ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿದೂರವನ್ನು $x+a$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

7.2.4 ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಇತರ ರೂಪಗಳು

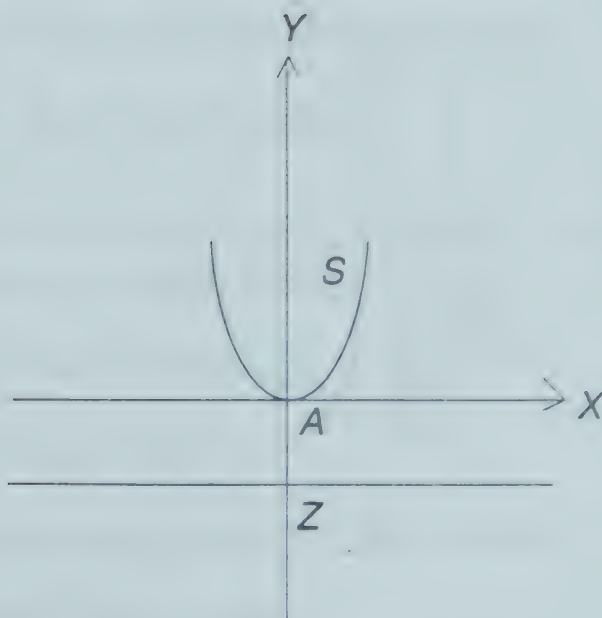
ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು	ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಅಕ್ಷ	ಶೃಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು	ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣ	ನಾಭಿ	ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು	ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಉದ್ದ
1 $y^2=-4ax$ (ಚಿತ್ರ 7.4)	$y=0$ (x–ಅಕ್ಷ)	(0, 0)	$x=a$	$(-a, 0)$	$(-a, \pm 2a)$	$4a$
2 $x^2=4ay$ (ಚಿತ್ರ 7.5)	$x=0$ (y–ಅಕ್ಷ)	(0, 0)	$y=-a$	$(0, a)$	$(\pm 2a, a)$	$4a$
3. $x^2=-4ay$ (ಚಿತ್ರ 7.6)	$x=0$ (y–ಅಕ್ಷ)	(0, 0)	$y=a$	$(0, -a)$	$(\pm 2a, -a)$	$4a$

1. $y^2 = -4ax$



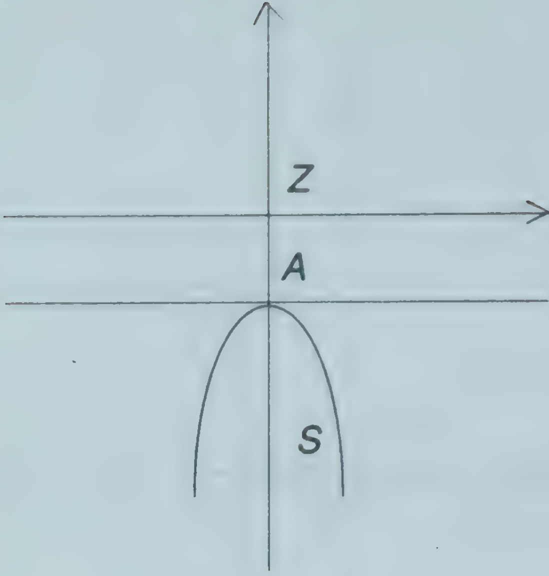
ಚಿತ್ರ 7.4

2. $x^2 = 4ay$



ಚಿತ್ರ 7.5

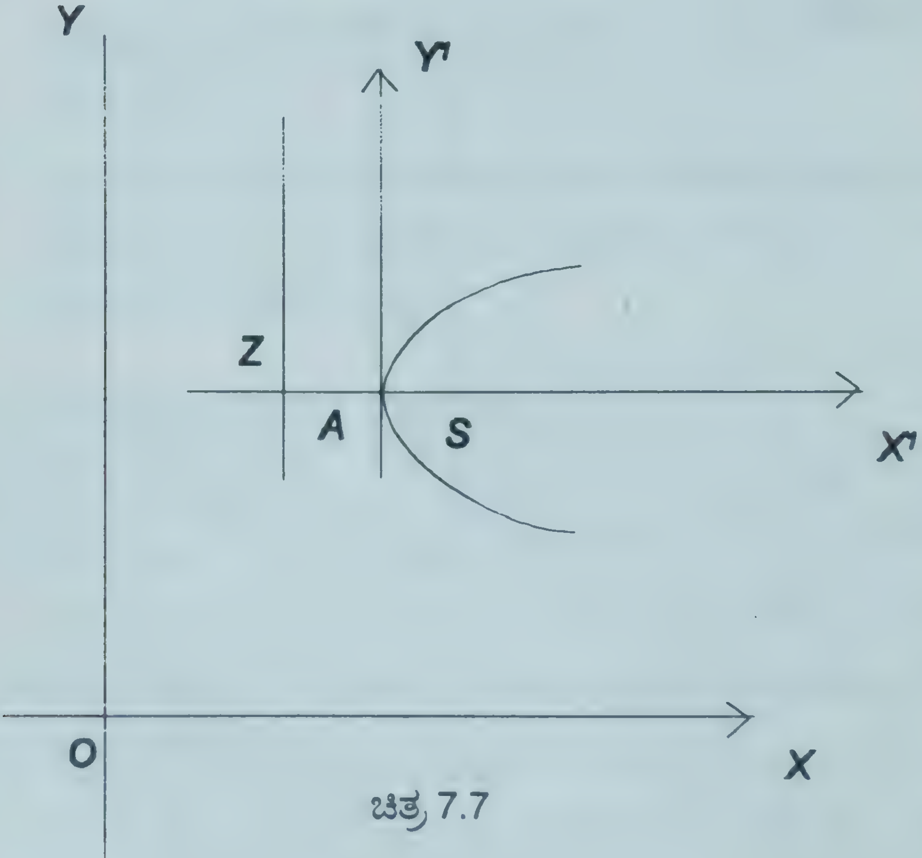
3. $x^2=-4ay$



ಚಿತ್ರ 7.6

4. (h,k) ಶೃಂಗವನ್ನುಳ್ಳ ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣ

$(y-k)^2 = 4a(x-h)$



ಚಿತ್ರ 7.7

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ನಾಭಿಯು (1, –1) ಮತ್ತು ಚಾಲಕವು $x+y+7=0$ ಆಗಿರುವ ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$P(x, y)$ ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು S ನಾಭಿಯಾಗಿರಲಿ. PMಅನ್ನು ಚಾಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಪೆರಾಬೋಲಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ

$SP=PM$ ಅಥವಾ $SP^2=PM^2$

ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $(x-1)^2+(y+1)^2 = \left(\dfrac{x+y+7}{\sqrt{2}}\right)^2$

ಅಥವಾ $x^2+y^2-2x+2x+2y+2 = \left(\dfrac{x+y+7}{\sqrt{2}}\right)^2$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು

$x^2+y^2-18x-10y-45=0$

2. $y^2=ax+b$ ಪೆರಾಬೋಲಾದ ನಾಭಿ, ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y^2=ax+b$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$y^2= a[x-(-b/a)]$

ಎಂಬ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು $(y-k)^2=4a(x-h)$

ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

ನಾಭಿಯು $\equiv \left(\dfrac{a^2-4b}{4a}, 0\right)$

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $= 4\left(\dfrac{a}{4}\right) = a$

ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$x + \frac{b}{a} = \frac{a}{4}$$

ಅಥವಾ $4ax+a^2+4b=0$.

3. $y^2 = 8x$ ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿದೂರ 8 ಆದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_1, y_1) ಎಂದಿರಲಿ.

$$y^2 = 8x$$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y^2 = 4ax$ ನೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$$4a=8 \therefore a=2$$

ಈಗ, ನಾಭಿದೂರ = 8

ಅಂದರೆ $x_1+a=8$

ಅಥವಾ $x_1 = 8-2=6$

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವು ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$y_1^2 = 8(6)$$

ಅಥವಾ $y_1 = \pm 4\sqrt{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಹ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(6, \pm 4\sqrt{3})$

ಅಭ್ಯಾಸ - 7.1

I ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾಗಳ ನಾಭಿ, ಶೃಂಗ, ನಾಭಿಲಂಬದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $y^2 = 20x$
2. $3x^2 + 2y = 0$
3. $y^2 = 4x - 2y + 3 = 0$

II 1. ಶೃಂಗವು (0, 0) ಮತ್ತು ಅಕ್ಷವು y–ಅಕ್ಷವೂ ಆಗಿದ್ದು (½, 2) ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ನಾಭಿಯು (3, –4) ಮತ್ತು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವು $x–y+5=0$ ಆಗಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $y^2=8x$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಾಭಿದೂರವು 4 ಆದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

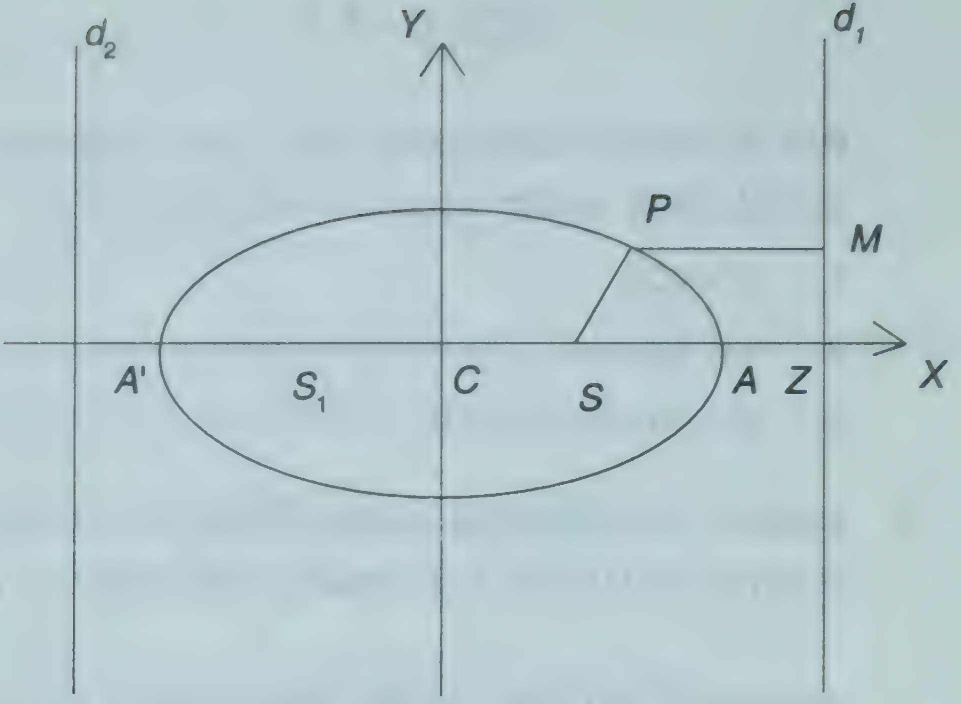
4. ನಾಭಿಲಂಬದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು (6, 7) ಮತ್ತು (6, –1) ಆದರೆ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವು $y=1$ ಮತ್ತು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಅಕ್ಷವು $x=1$ ಹಾಗೂ ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ 16 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿರುವ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7.3.1 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ

ಐಕ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನುಳ್ಳ ಶಂಕುಜವನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

S ನಾಭಿಯು ಮತ್ತು d_1 ಚಾಲಕವಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ e ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯಾಗಿರಲಿ. d_1 ಚಾಲಕಕ್ಕೆ SZ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 7.8).



ಚಿತ್ರ 7.8

SZ ಸರಳರೇಖೆಯು A ಮತ್ತು A' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ e:1 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಿಂದ ವಿಭಜಿಸಲಿ. ಅಂದರೆ

$$\frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1} \qquad \ldots (1)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$AA' = 2a$ ಆಗಿರಲಿ. C ಯು AA' ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. C ಅನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು CZ ರೇಖೆಯನ್ನು x–ಅಕ್ಷವಾಗಿಯೂ, CY ರೇಖೆಯನ್ನು y–ಅಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ

$$SA = eAZ \text{ ಮತ್ತು } SA' = eA'Z$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ (1) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನಮಾಡಿದಾಗ

$$SA + SA' = e[AZ + A'Z]$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$$AA' = e[CZ - CA + CA' + CZ]$$

ಅಥವಾ $AA = e(2CZ)$ [ಕಾರಣ $CA = CA'$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ]

ಅಥವಾ $2a = 2eCZ$

ಅಥವಾ $CZ = \frac{a}{e}$ ... (2)

ಇದೇ ರೀತಿ, (1) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವ್ಯವಕಲಿಸಿದಾಗ

$SA' - SA = e[A'Z - AZ]$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ

$CA' + CS - CA + CS = e(AA')$

ಅಥವಾ $2CS = e(2a)$

ಅಥವಾ $CS = ae$ ... (3)

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. S ನಾಭಿಯು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು (3) ರಿಂದಾಗಿ

$\boldsymbol{S \equiv (ae, 0)}$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದು ಪಥದ ನಿಬಂಧನೆಯು

$\frac{SP}{PM} = e$

ಅಥವಾ $SP = e\,PM$

ಅಥವಾ $SP^2 = e^2 PM^2$

[ಇಲ್ಲಿ $e<1$] ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $(x-ae)^2 + y^2 = (ex-a)^2$

ಅಥವಾ $x^2 + a^2e^2 - 2xae + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$

ಅಥವಾ $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ $a^2(1-e^2)$ ನಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

ಅಥವಾ $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ ... (4)

ಇಲ್ಲಿ $\boldsymbol{b^2 = a^2(1-e^2)}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಸಮೀಕರಣ (4)ಅನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

7.3.2 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕಗಳು

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ x ನ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = \pm a \left[1 - \frac{y^2}{b^2}\right]^{1/2}$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ y ನ ಬೆಲೆಯು b ಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ. y ನ ಉತ್ಪನ್ನವು $y = \pm\ b \left[1 - \frac{X^2}{a^2}\right]^{1/2}$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯು a ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆ ಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು :

1. ಈ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ.

2. C ಅನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3. ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಮತ್ತು A' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. AA' ಅನ್ನು *ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ*ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. A, A' ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(a, 0)$ ಮತ್ತು $(-a, 0)$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು B' ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. BB' ಅನ್ನು *ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ*ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. B ಮತ್ತು B' ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(0, b)$ ಮತ್ತು $(0, -b)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. $AA' = 2a$ ಮತ್ತು $BB' = 2b$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಮತ್ತೊಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $a > b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

4. S ಮತ್ತು S' ಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ *ನಾಭಿ*ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

5. d_1, d_2 ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ *ಚಾಲಕ*ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು (7.3.1 ನಲ್ಲಿ (2) ರಿಂದಾಗಿ)

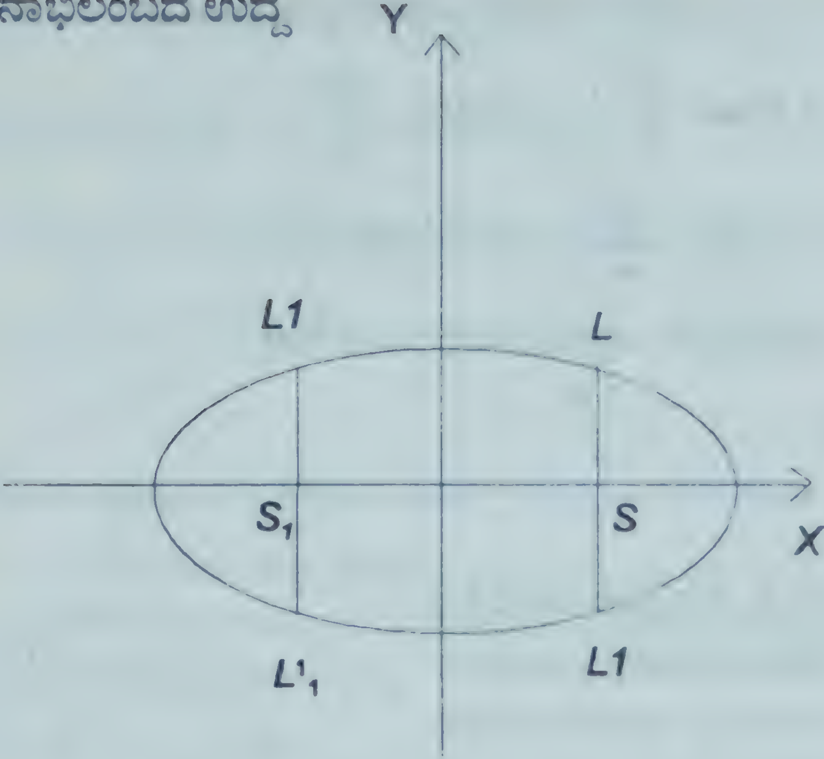
$$x = \frac{a}{e} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad x = \frac{-a}{e}$$

6. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

7.3.3 ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ



ಚಿತ್ರ 7.9

ಚಿತ್ರ 7.9 ರಲ್ಲಿ LL' ಜ್ಯಾವು S ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕವೂ, $L_1L'_1$ ಜ್ಯಾವು S_1 ಮೂಲಕವೂ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. LSL' ಅನ್ನು ಮತ್ತು $L_1S_1L_1'$ ಅನ್ನು **ನಾಭಿಲಂಬ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

L ಬಿಂದುವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ x – ನಿರ್ದೇಶಕವು ae ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು y–ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ

$$y^2 = b^2\,(1 - e^2)$$

ಅಥವಾ $y^2 = b^2 \dfrac{b^2}{a^2}$ | ಕಾರಣ $b^2 = a^2\,(1-e^2)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $y = \dfrac{b^2}{a}$ | ಅಥವಾ $\dfrac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$

ಅಂತೆಯೇ ನಾಭಿಲಂಬಾಂತರಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$L \equiv \left(ae, \frac{b^2}{a}\right), \quad L^1 \equiv \left(ae, \frac{-b^2}{a}\right)$$

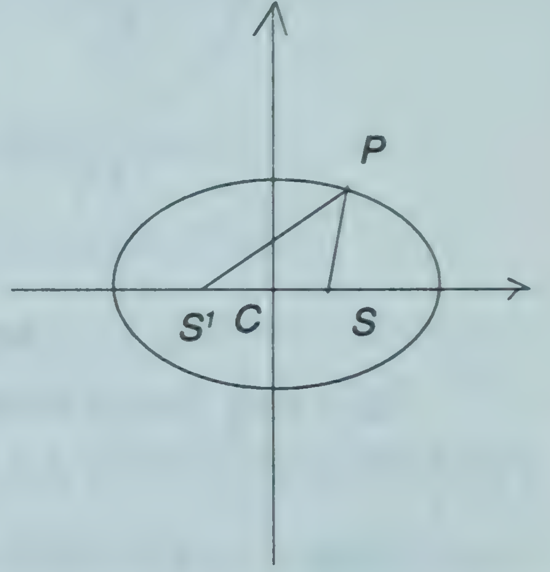
$$L_1 \equiv \left(-ae, \frac{b^2}{a}\right), \quad L_1{}^1 \equiv \left(-ae, \frac{-b^2}{a}\right)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ

$$LL' = L_1L_1' = \frac{2b^2}{a}$$

ಸೂಚನೆ:

1. S ಮತ್ತು S^1 ನಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ದೂರವನ್ನು *ನಾಭಿದೂರವೆಂದು* ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 7.10 ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ SP ಮತ್ತು $S'P$ ಗಳನ್ನು ನಾಭಿ ದೂರಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 7.10

2. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮತ್ತು ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಗಳ ಸಂಕಲನವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

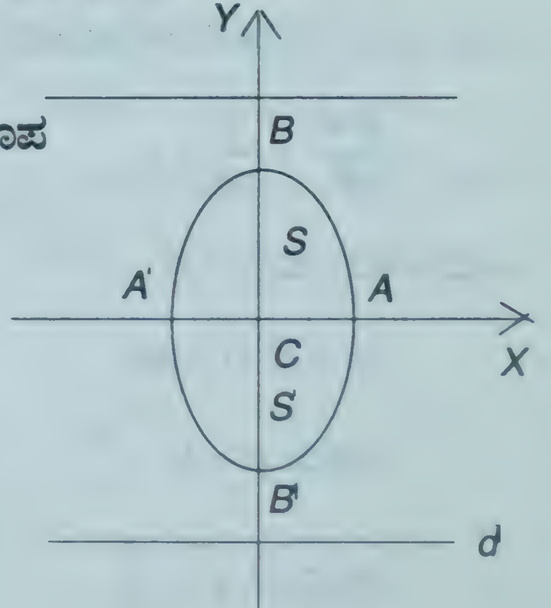
$$SP + S'P = 2a$$

7.3.4 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪ

ಚಿತ್ರ 7.11 ರಲ್ಲಿ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ಸಮೀಕರಣವು ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶ $a < b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಕ್ಷಣಗಳು :



ಚಿತ್ರ 7.11

1. ನಾಭಿಗಳು y–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ.

2. ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳು $y = \frac{b}{e}$ ಮತ್ತು $y = \frac{-b}{e}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

3. ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ = $\frac{2a^2}{b}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

4. ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ $2b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ $2a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ

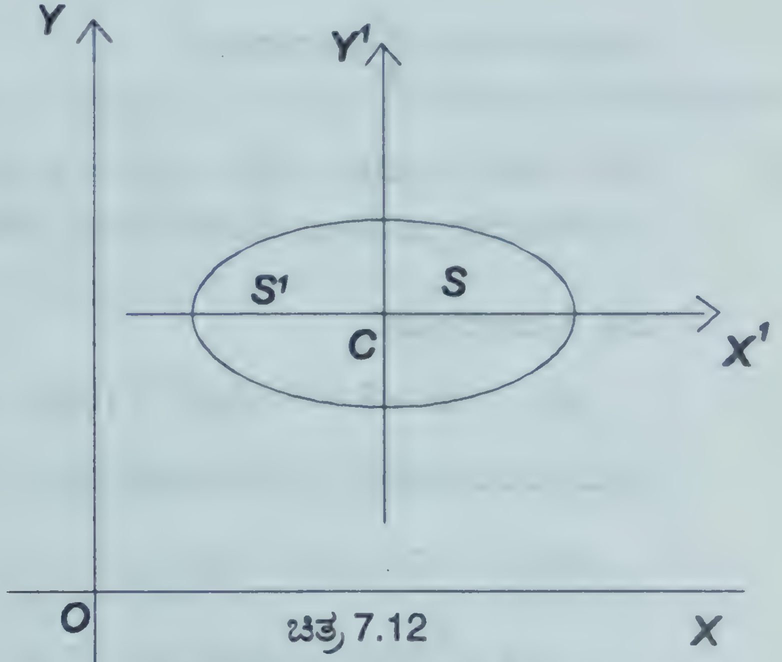
$$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

7.3.5 (*h, k*) ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನುಳ್ಳ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

(h, k) ಬಿಂದುವನ್ನು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗುಳ್ಳ ಮತ್ತು x– ಹಾಗೂ x– ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ $2a$ ಮತ್ತು $2b$ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ ಮತ್ತು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 7.12

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $9x^2 + 25y^2 = 225$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ, ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ, ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ, ನಾಭಿಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $a > b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ $= 2a = 2 \times 5 = 10$

ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ $= 2b = 2 \times 3 = 6$

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{5} = \frac{18}{5}$

ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $= \frac{4}{5}$

ನಾಭಿಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\equiv (\pm ae, 0), (\pm 4, 0)$

ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, $x = \pm \frac{a}{e}$

ಅಂದರೆ, $x = \pm \frac{25}{4}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

2. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು, ನಾಭಿಗಳು ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$9x^2 - 18x + 9 - 9 + 25y^2 + 100y + 100 - 100 - 116 = 0$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$9(x-1)^2 + 25(y+2)^2 = 225$$

ಅಥವಾ $$\frac{9(x-1)^2}{225} + \frac{25(y+2)^2}{225} = 1$$

ಅಥವಾ $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

ಎಂದು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ

(i) ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\equiv (1, -2)$

(ii) ನಾಭಿಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\equiv (h \pm ae, k) = (1 \pm 4, -2)$
ಅಂದರೆ, $(5, -2)$ ಮತ್ತು $(-3, -2)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳು, $x = h \pm \dfrac{a}{e} = 1 \pm \dfrac{25}{4}$
ಅಂದರೆ, $4x - 29 = 0$
ಮತ್ತು $4x + 21 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

3. $(2, 2)$ ಮತ್ತು $(3, 1)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ಆಗಿರಲಿ. ಈ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \text{ ಮತ್ತು } \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ

$$\frac{1}{a^2} = p \text{ ಮತ್ತು } \frac{1}{b^2} = q$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಆಗ

$$4p + 4q = 1 \text{ ಮತ್ತು } 9p + q = 1$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$p = \frac{3}{32} \text{ ಮತ್ತು } q = \frac{5}{32}$$

ಆ ಕಾರಣ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{3x^2}{32} + \frac{5y^2}{32} = 1$$

ಅಥವಾ $3x^2 + 5y^2 = 32$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ – 7.2

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿಗಳು, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ (ii) $2x^2 + 5y^2 = 20$

   (iii) $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$ (iv) $4x^2 + 5y^2 + 10y - 75 = 0$

2. ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ½ ಮತ್ತು (3, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಾಭಿಯನ್ನು, $x - y + 1 = 0$ ಚಾಲಕವಾಗಿವುಳ್ಳ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. P (2, 7) ಮತ್ತು Q (4, 3) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y = 5$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ, ನಾಭಿ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ (2, –1), (1, –2), 1/4 ಆದರೆ ಆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

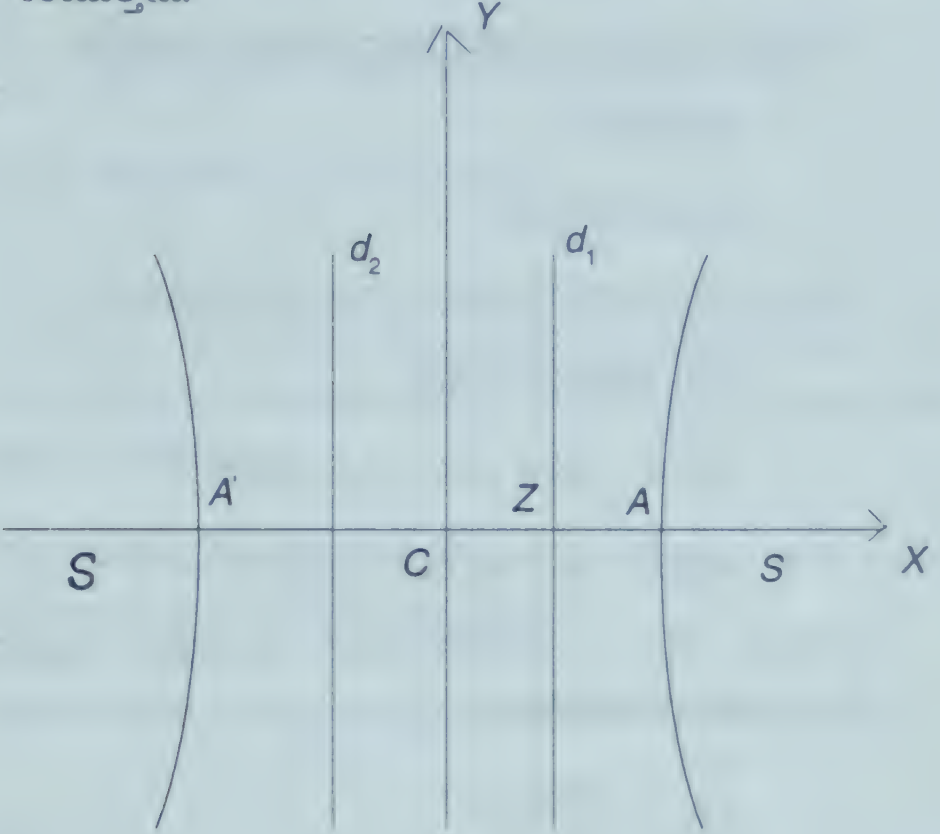
6. ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ 5 ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ 2/3 ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

7. ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳು (1, 0) ಮತ್ತು (–1, 0) ಹಾಗೂ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ 1/2 ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ನಾಭೀಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 4 ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 20 ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7.4.1 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣ

ಐಕ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನುಳ್ಳ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 7.13

S ಬಿಂದುವು ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ, d_1 ಚಾಲಕವಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ.

ಚಾಲಕ d_1 ಗೆ *SZ* ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ.

A ಮತ್ತು A_1 ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ *SZ* ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ *e*:1 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ.

ಅಂದರೆ $\dfrac{SA}{AZ} = \dfrac{e}{1}$ ಅಥವಾ $SA=eAZ$ ... (1)

ಮತ್ತು $\dfrac{SA'}{A^1Z} = \dfrac{e}{1}$ ಅಥವಾ $SA' = eA^1Z$ ... (2)

C ಬಿಂದುವು *AA'*ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $AA'=2a$ ಆಗಿರಲಿ. ನಂತರ *C* ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, *CX* ಮತ್ತು *CY* ಗಳನ್ನು *x* ಮತ್ತು

y–ಅಕ್ಷಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಗಳನ್ನು ಸಂಕಲಿಸುವುದರಿಂದ

$$SA+SA'=e[AZ+A'Z]$$

ಅಥವಾ $(CS-CA)+(CA'+CS)=e(AA')$

(C ಯು AA' ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾದ್ದರಿಂದ $CA=CA'$ ಆಗುತ್ತದೆ)

$$2CS=2ae$$

ಅಥವಾ $CS=ae$

ಅದೇ ರೀತಿ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಗಳನ್ನು ವ್ಯವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$SA'-SA=e(A'Z-AZ)$$

ಅಥವಾ $AA'= e[CA'+CZ-CA+CZ]$

ಅಥವಾ $2a = e(2CZ)$ ಅಥವಾ $CZ = \frac{a}{e}$

ಆಗುತ್ತದೆ. $P(x, y)$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ವಿವರಣೆಯಂತೆ

$\frac{SP}{PM} = e$ ಮತ್ತು $e>1$

ಅಂದರೆ, $SP = ePM$

ಅಥವಾ $SP^2=e^2PM^2$

ಅಂದರೆ, $(x-ae)^2+y^2=(ex-a)^2$

ಅಥವಾ $x^2-2aex+a^2e^2+y^2 = e^2x^2-2aex+a^2$

ಅಥವಾ $(e^2-1)x^2-y^2= a^2(e^2-1)$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು $a^2(e^2-1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

ಅಥವಾ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

ಇಲ್ಲಿ $b^2 = a^2(e^2-1)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. $P(x, y)$ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

7.4.2 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮುಖ್ಯ ಲಾಕ್ಷಣಿಕಗಳು

1. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ yನ ಉತ್ಪನ್ನವು

$$y = \pm b\left[\frac{x^2}{a^2} -1\right]^{1/2}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x<a$ ಆದಾಗ y ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ xನ ನೈಜ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ y^2ಗೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ yನ ನೈಜಬೆಲೆಗಳಿಗೆ x^2ಗೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ.

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವೃತ್ತವು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದು.

2. Cಅನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (0, 0) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3. AA' ಅನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $A(a, 0)$ ಮತ್ತು $A'(-a, 0)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

AA' ಅನ್ನು ***ಛೇದಕ ಅಕ್ಷ***ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $AA' = 2a$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. $x= 0$ ಆದಾಗ $y^2 = b^2$ ಆಗುವುದು. ಇದರಿಂದ y ನ ರೇಖೆಯ ಬೆಲೆಗಳು ಊಹ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯು y–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $B(0, b)$ ಮತ್ತು $B^1 (0, -b)$ ಎಂದು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. BB^1 ಅನ್ನು ***ಅನುವರ್ತಿ*** ಅಕ್ಷವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $BB^1=2b$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

4. $$e = \left[\frac{a^2+b^2}{a^2}\right]^{1/2}$$

ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

5. S, S' ಗಳನ್ನು ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ *ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳೆಂದು* ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(ae, 0)$ ಮತ್ತು $(-ae, 0)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

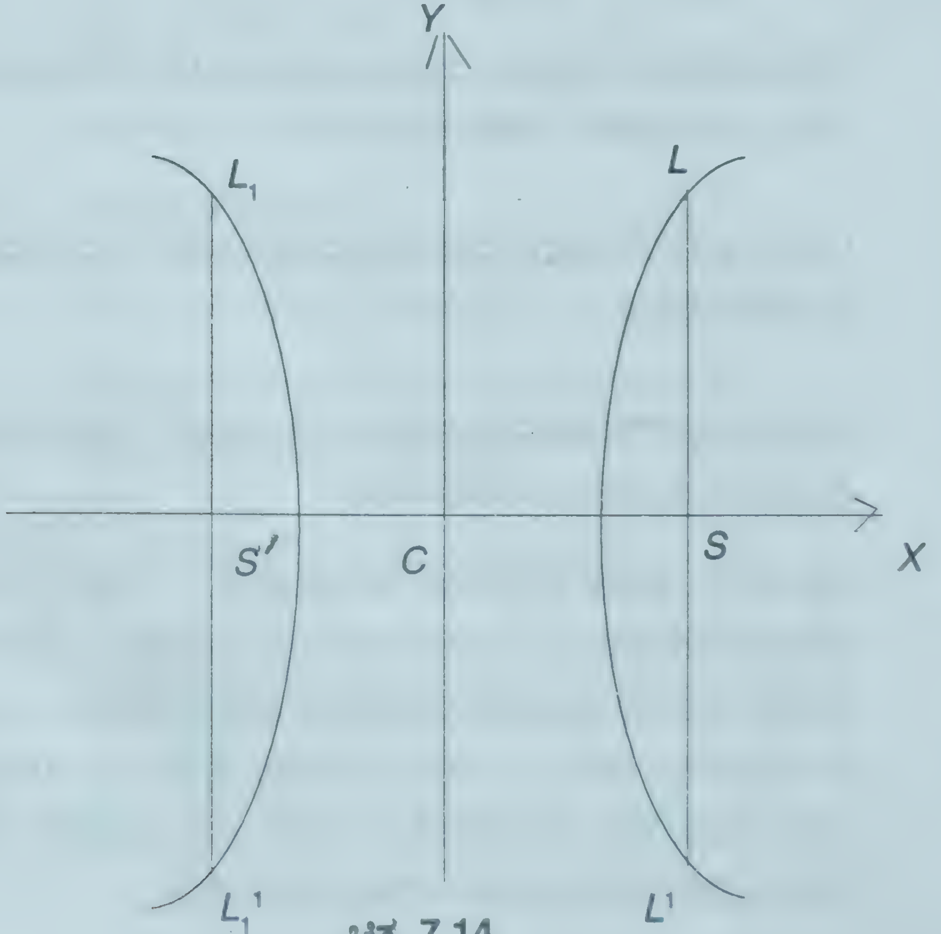
6. d_1, d_2 ಗಳನ್ನು *ಚಾಲಕಗಳೆಂದು* ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x = \frac{a}{e} \text{ ಮತ್ತು } x = \frac{-a}{e}$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

7.4.3 ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ

S ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ LSL' ಜ್ಯಾವನ್ನು ನಾಭಿಲಂಬವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. L ಬಿಂದುವು ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (ae, SL) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 7.14).



ಚಿತ್ರ 7.14

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ}$$

x ಮತ್ತು yನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$SL^2 = \left[\frac{a^2 e^2}{a^2} \quad -1\right] b^2$$

ಅಥವಾ $SL^2 = b^2(e^2-1)$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $e^2-1 = \frac{b^2}{a^2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$SL^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

ಅಂದರೆ $SL = \pm \frac{b^2}{a}$

ಆದ್ದರಿಂದ L, L' ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$\left[ae, \frac{b^2}{a}\right] \text{ ಮತ್ತು } \left[ae, \frac{-b^2}{a}\right]$$

ಮತ್ತು L_1, L_1' ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

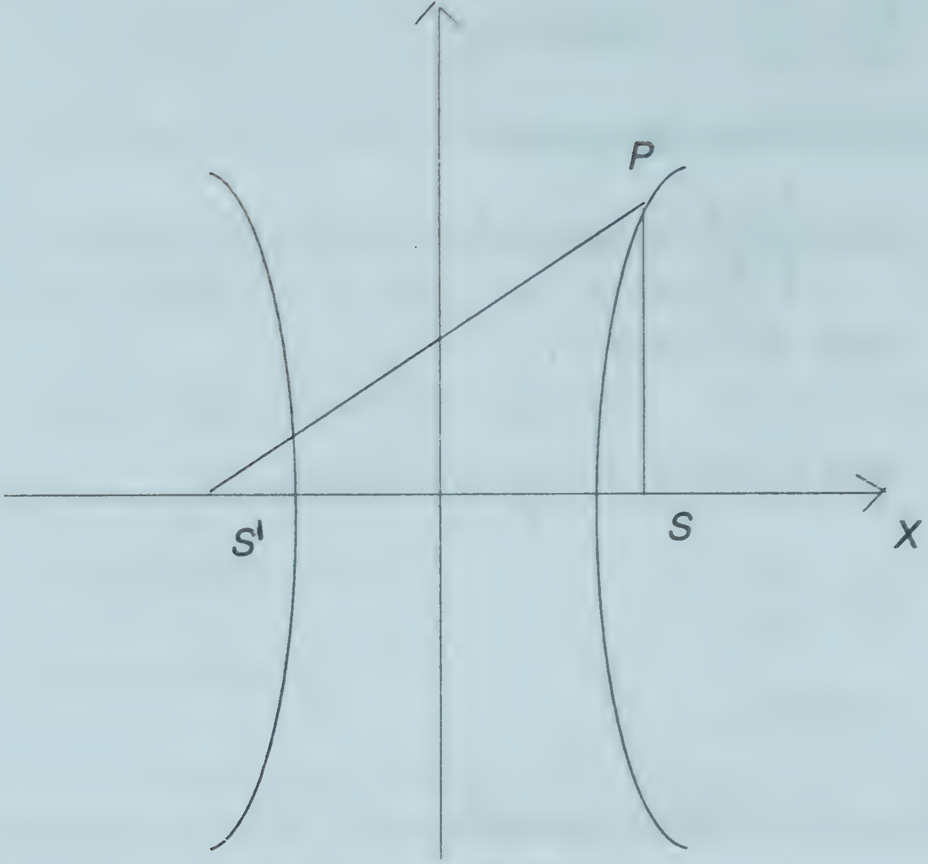
$$\left[-ae, \frac{b^2}{a}\right] \text{ ಮತ್ತು } \left[-ae, \frac{-b^2}{a}\right]$$

ಹಾಗೂ ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $= \frac{2b^2}{a}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : P ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಈ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ನಾಬಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಗಳನ್ನು *ನಾಭಿದೂರಗಳೆಂದು* ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವೊಂದರ ನಾಭಿದೂರಗಳ ವ್ಯವಕಲನವು ಸ್ಥಿರವೂ ಮತ್ತು ಅದು $2a$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ 7.15) ಅಂದರೆ,

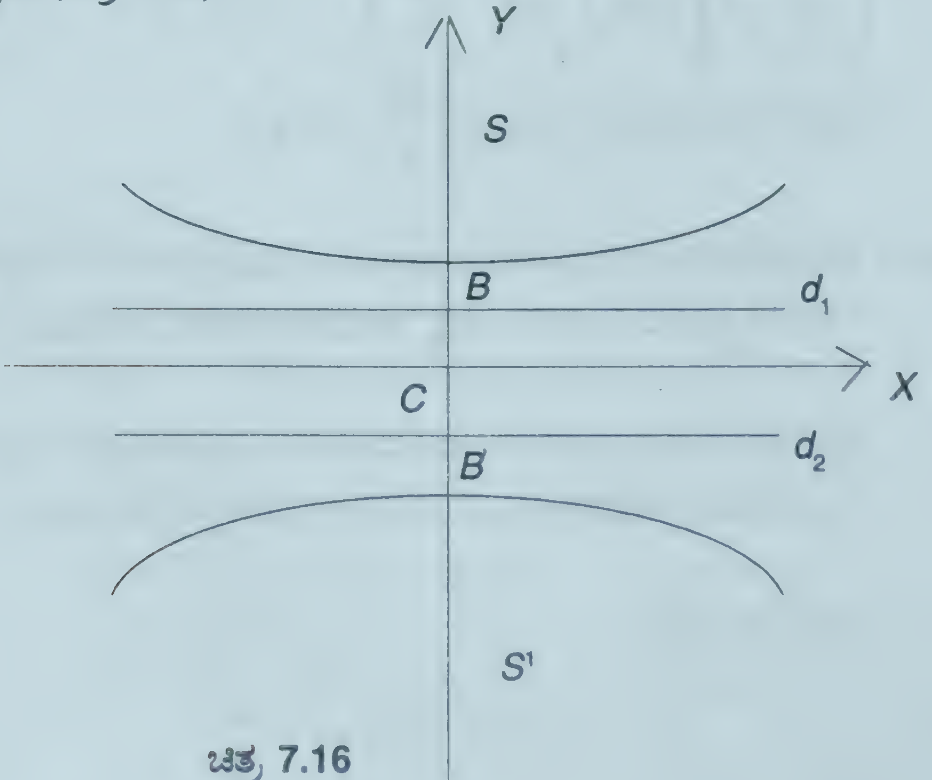
$S^1P - SP = 2a$



ಚಿತ್ರ 7.15

7.4.4 ಹೈಪೆರ್‌ಬೊಲಾದ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪ

ಛೇದಕ ಅಕ್ಷವನ್ನು *y*–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಹೊಂದಿರುವ ಹೈಪೆರ್‌ಬೊಲಾವನ್ನು ಪ್ರಮಾಣಪೂರ್ಣ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಅನುವರ್ತಿ (ಕಾಂಜುಗೇಟ್) ಹೈಪೆರ್‌ಬೊಲಾವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 7.16) .



ಚಿತ್ರ 7.16

ಇದರ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳು, $(0, \pm be)$

ಚಾಲಕಗಳು $y = \pm \frac{b}{e}$

B, B^1 ಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅವುಗಳು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(0, b)$ ಮತ್ತು $(0, -b)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಛೇದಕ-ಅಕ್ಷದ ಉದ್ದ $= 2b$

ಮತ್ತು ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷದ ಉದ್ದ $=2a$

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $= \frac{2a^2}{b}$

ಸೂಚನೆ : 1. $a=b$ ಆದಾಗ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2-y^2=a^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾವನ್ನು ***ಲಂಬ (ರೆಕ್ಟ್ಯಾಂಗುಲರ್) ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾ***ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2. ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು $(0, 0)$ ದಿಂದ (h, k) ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾಗಳ ಅಕ್ಷಗಳು, ಶೃಂಗಗಳು, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ, ನಾಭಿಗಳು, ಚಾಲಕಗಳು ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $9x^2-16y^2 = 144$ (ii) $x^2-3y^2 = -12$

(i) $9x^2-16y^2=144$

ಇದನ್ನು $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $a=4$, $b=3$ ಆಗಿರುವುದು.

ಛೇದಕ ಅಕ್ಷ $= 2a = 8$

ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ $= 2b = 6$

ಶೃಂಗಗಳು $= (\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $= e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16+9}}{4} = \frac{5}{4}$

ನಾಭಿ ಬಿಂದುಗಳು $\equiv (\pm ae, 0) \equiv (\pm 5, 0)$

ಚಾಲಕಗಳು, $x=\pm\frac{a}{e}$, ಅಂದರೆ $x=\pm\frac{16}{5}$

ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $=\frac{2b^2}{a}=\frac{9}{2}$

(ii) $x^2-3y^2=-12$

ಅಥವಾ $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$

ಇದರಲ್ಲಿ $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $b=2$

ಛೇದಕ ಅಕ್ಷ $= 2b = 4$

ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ $= 2a = 4\sqrt{3}$

ಶೃಂಗಗಳು $\equiv (0, \pm b) \equiv (0, \pm 2)$

$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{\sqrt{12+4}}{2}=2$

ನಾಭಿಗಳು $= (0, \pm 4)$

ಚಾಲಕಗಳು, $y=\pm\frac{b}{e}=\pm 1$. ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $=\frac{2a^2}{b}=\frac{2(12)}{2}=12$

ಅಭ್ಯಾಸ – 7.3

1. $2x+y=1$ ಅನ್ನು ಚಾಲಕವಾಗಿಯೂ, (1, 2) ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ, 3 ಅನ್ನು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯಾಗಿವುಳ್ಳ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x-y=0$ ವನ್ನು ಚಾಲಕವಾಗಿಯೂ, (4, 0) ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ 2 ಇರುವ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾಗಳ ಅಕ್ಷಗಳು, ನಾಭಿಬಿಂದುಗಳು, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $16x^2-9y^2=144$ (ii) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

   (iii) $25y^2-24x^2=600$ (iv) $x^2-3y^2-4x-6y-11=0$

   (v) $9x^2-16y^2+72x-32y-16=0$

4. ನಾಭಿಗಳ ಅಂತರವು 8 ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 9/2 ಇರುವ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಲಂಬ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ $\sqrt{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ನಾಭಿಗಳ ಅಂತರವು 20 ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 64/5 ಇರುವ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ನಾಭಿಗಲು (2, 0) ಮತ್ತು (–2, 0) ಇರುವ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ 3/2 ಇರುವ ಹೈಪೆರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7.5 ಶಂಕುಜಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

7.5.1 $y = mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2 = 4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ

$y=mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2=4ax$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು

$$(mx+c)^2 = 4ax \text{ ಅಥವಾ } m^2x^2+2x(mc-2a)+c^2 = 0$$

ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದು x ನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು x ನ ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$4(mc-2a)^2-4m^2c^2=0$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ, $c=a/m$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $c=a/m$ ಆದಾಗ $y = mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವುದು; ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$\left[\frac{a}{m^2}, 2am\right]$$

7.5.2 ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$y^2=4ax$ ದತ್ತ ಪೆರಾಬೊಲಾವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $P(x_1, y_1)$ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$y^2=4ax$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4a \text{ ಅಥವಾ } \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x1, y1)} = \frac{2a}{y_1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ (x_1, y_1) ನಲ್ಲಿ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1 = \frac{2a}{y_1}(x-x_1)$$

ಅಥವಾ $\boxed{yy_1 = 2a(x+x_1)}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇರೀತಿ ಪೆರಾಬೊಲಾದ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x-x_1)$$

7.5.3 $y= mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ

$y = mx+c$ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$$

ಇದು xನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಇದರ ಎರಡು ಮೂಲಕಗಳೂ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುವುಗರಿಂದ, ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.ಆದ್ದರಿಂದ

$$4a^4m^2c^2-4(a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2)=0$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$\boxed{c^2=a^2m^2+b^2}$$

ಅಂದರೆ, $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ಆದಾಗ, $y=mx+c$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವುದು.

7.5.4 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$P(x_1, y_1)$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \text{ ಅಥವಾ } \frac{dy}{dx}=\frac{-b^2x}{a^2y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

ಅಥವಾ $a^2yy_1-a^2y_1^2=-b^2xx_1+b^2x_1^2$

ಅಥವಾ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$

ಅಥವಾ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

ಆಗುವುದು. ಏಕೆಂದರೆ, (x_1, y_1) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದ್ದರಿಂದ.

ಅದೇ ರೀತಿ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು

$y-y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ $(x-x_1)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

7.5.5 $y = mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆ

$y = mx+c$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$x^2(b^2-m^2a^2)-2mcxa^2-a^2(c^2+b^2)=0$$

ಎಂಬ x ನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಉಂಟಾಗುವುದು. ಇದರ ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದರ ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$4m^2c^2a^4+4a^2(b^2-a^2m^2)(c^2+b^2)=0$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ

$c^2 = a^2m^2-b^2$ ಅಥವಾ $c = \pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $c = \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$ ಆದಾಗ $y= mx+c$ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೆನಿಸುತ್ತದೆ.

7.5.6 ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$P(x_1, y_1)$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದಾಗ

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \text{ ಅಥವಾ } \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

ಅಥವಾ $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1 = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

ಅಥವಾ $a^2yy_1-a^2y_1^{\ 2}=b^2xx_1-b^2x_1^{\ 2}$

ಅಥವಾ $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^{\ 2}}{a^2} - \frac{y_1^{\ 2}}{b^2}$

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

[(x_1, y_1) ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದ್ದರಿಂದ]

ಅದೇ ರೀತಿ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾಕ್ಕೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1 = \frac{-a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $2y=5x+k$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y^2=6x$ ಪೆರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, ಇದಕ್ಕೆ ನಿಬಂಧನೆಯು $c=a/m$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $y=mx+c$ ರೂಪದಲ್ಲಿ

$$y=\frac{5}{2}x+\frac{k}{2} \qquad k=\frac{2(3/2)}{5/2} \quad \text{ಅಥವಾ } k=\frac{6}{5}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

2. (6, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದಾಗ, (6, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(6,\,0)}=\left.\frac{-x}{4y}\right]_{(6,\,0)} \rightarrow \infty$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (6, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವು, $x=6$ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವು $y=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 7.4

1. $y^2+4x=0$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ (–1, –2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $2x+3y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $y^2=8x$ ಪೆರಾಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $y^2=6x$ ಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $3x-2y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. (2, 5) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y^2=8x$ ಪೆರಾಬೋಲಾಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{24}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ (3, –4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $2x+y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2+2y^2-4x+12y+14=0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $3x+y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\frac{(x-1)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾಕ್ಕೆ (6, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7.6. ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನ ಕೊಡುಗೆ

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು (ಎಲಿಪ್ಸ್) ಚರ್ಚಿಸಿದ ಏಕೈಕ ಗಣಿತಜ್ಞನೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ಕರ್ನಾಟಕದವನೇ ಆದ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಜೈನ ಗಣಿತಜ್ಞ *ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ* (ಕ್ರಿ.ಶ.9ನೇ ಶತಮಾನ) ಎಂಬುದು ನಮಗೆಲ್ಲಾ ಬಹಳ ಹೆಮ್ಮೆಯ ವಿಷಯ.

ಆತನ ***ಗಣಿತಸಾರಸಂಗ್ರಹ***ದಲ್ಲಿ ಮಹಾವೀರನು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ("ಆಯವೃತ್ತ" ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿದ್ದಾನೆ) ಪರಿಧಿಯನ್ನು $\sqrt{24b^2+16a^2}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಸೂತ್ರವು ಪರಿಧಿಯ ಸ್ಥೂಲವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ನಿಖರವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಸುಲಭವಾದ ಸೂತ್ರವು ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬುದು ಗಮನಾರ್ಹ.

9. $4x^2-9y^2 = 36$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ನಾಭಿಲಂಬದ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $2x+y-3=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{5} = 1$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 8

ಪ್ರತಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

$x = f(y)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು $y = f^{-1}(x)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

8.1 ಪ್ರತಿಲೋಮ sine ಉತ್ಪನ್ನ ($\sin^{-1}x$)

$x = \sin y$ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ಎಂಬ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು $-1 \le x \le 1$ ಎಂಬ ಬಿಂಬಗಣದಲ್ಲಿ ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ yಯನ್ನು xನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಇದನ್ನು $\sin^{-1}x$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, $x = \sin y \Rightarrow y = \sin^{-1} x$

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ yಯ ಬೆಲೆಯು $\frac{-\pi}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ ಬೆಲೆಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಅದನ್ನು $\sin^{-1} x$ ನ *ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $\frac{\pi}{3}$

(ii) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $-\frac{\pi}{3}$

(iii) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ $-\frac{\pi}{6}$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ x ಧನಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\sin^{-1} x$ ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ x ಋಣಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\sin^{-1}x$ ಬೆಲೆಯು $-\frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು

0 ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಲೋಮ sine ನ (ಅಂದರೆ $\sin^{-1}$ ನ) ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು ಅಂದರೆ $\sin^{-1} x$ ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ಅಂತರದಲ್ಲಿದ್ದು ಸಾಂಖ್ಯಿಕವಾಗಿ ಕನಿಷ್ಠವಾದ ಬೆಲೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

8.2 ಪ್ರತಿಲೋಮ cosine ಉತ್ಪನ್ನ ($\cos^{-1}x$)

$x = \cos y$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಕ್ಷೇತ್ರವು $0 \le y \le \pi$ ಮತ್ತು ಬಿಂಬ ಗಣವು $-1 \le x \le 1$ ಆದಾಗ ಇದು ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ yನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮ cosine ($\cos^{-1}$) ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $x = \cos y \Rightarrow y = \cos^{-1} x$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ x ಧನಾತ್ಮಕವಾದಾಗ, $\cos^{-1} x$ ವು ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಇನ್ನೊಂದು ಬೆಲೆ $-\frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು 0 ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ಹಾಗೂ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ಅಥವಾ $-\frac{\pi}{3}$ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಇಂಥಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ಸಂಖ್ಯೆ x ಋಣಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\cos^{-1} x$ ದ ಬೆಲೆಯು $\frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು π ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. x ಧನಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\cos^{-1} x$ ದ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಲೋಮ cosine ನ (ಅಂದರೆ $\cos^{-1}$) ನ *ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು* $[0,\pi]$ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

8.3 ಪ್ರತಿಲೋಮ tangent ಉತ್ಪನ್ನ ($\tan^{-1}x$)

$x = \tan y$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಕ್ಷೇತ್ರವು $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ಹಾಗೂ ಬಿಂಬಗಣವು $-\infty < x < \infty$ ಆದಾಗ ಇದು ಏಕಮೌಲ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ yನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮ tangent ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$x = \tan y \Rightarrow y = \tan^{-1} x$$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ x ಧನಾತ್ಮಕವಾದಾಗ $\tan^{-1} x$ದ ಬೆಲೆಯು 0 ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ ಮತ್ತು } \tan^{-1} (-1) = -\frac{\pi}{4}$$

ಅಂದರೆ, $\tan^{-1}$ ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯು $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $\text{cosec}^{-1}x$, $\sec^{-1} x$ ಮತ್ತು $\cot^{-1} x$ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. (i) $\sec^{-1}(-2)$ (ii) $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ (iii) $\tan^{-1}[\tan(260°)]$

   (iv) $\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{4})$ (v) $\cot^{-1}[\cot(-740°)]$

(i) $\sec^{-1}(-2) = \sec^{-1}(2) = \frac{\pi}{3}$

(ii) $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = -\text{cosec}^{-1}(\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$

(iii) $\tan^{-1}[(\tan(260°)]$

$= \tan^{-1}[\tan(180°+80°)] = \tan^{-1}[\tan 80°] = 80°$

(iv) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

(v) $\cot^{-1} [\cot (-740°)]$

$= \cot^{-1} [-\cot 740°]$

$= -\cot^{-1} [\cot (720° + 20°)]$

$= -\cot^{-1} [\cot 20°] = -20°$

2. $\sin^{-1} x = \cos^{-1} \sqrt{1-x^2} = \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1} x = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore x = \sin \theta$

ಈಗ, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2 \theta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \cos\theta = 1-x^2$

ಅಥವಾ $\theta = \cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \sin^{-1} x = \cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$

ಈಗ, $x = \sin\theta$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

ಅಂದರೆ, $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

ಅಥವಾ $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$\therefore \boxed{\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

3. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1} x = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore x = \sin\theta$

ಅಥವಾ $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

ಅಥವಾ $\theta + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

ಅಂದರೆ, $\boxed{\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}}$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$

ಮತ್ತು $\sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

4. $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sec^{-1} x = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore x = \sec\theta$

ಅಥವಾ $\frac{1}{x} = \cos\theta$

$\therefore \cos^{-1} \dfrac{1}{x} = \theta$

ಅಂದರೆ, $\boxed{\sec^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1}{x}}$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $\boxed{\tan^{-1} x = \cot^{-1} \dfrac{1}{x}}$

ಮತ್ತು $\boxed{\text{cosec}^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{1}{x}}$

5. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\cos^{-1}(-x) = \alpha$ ಆಗಿರಲಿ

$\therefore -x = \cos \alpha$

ಅಥವಾ $x = -\cos \alpha$

ಅಥವಾ $x = \cos(\pi - \alpha)$

$\therefore \cos^{-1} x = \pi - \alpha$

ಅಥವಾ $\alpha = \pi - \cos^{-1} x$

$\therefore \boxed{\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x}$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $\boxed{\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x}$

ಮತ್ತು $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

6. $x \geq 0, y \geq 0$ ಮತ್ತು $xy < 1$ ಆದಾಗ $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $2\tan^{-1} x$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\tan^{-1} x = \alpha$ ಮತ್ತು $\tan^{-1} y = \beta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore x = \tan\alpha$ ಮತ್ತು $y = \tan\beta$

ಈಗ, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{x + y}{1 - xy}$

ಅಥವಾ $\alpha + \beta = \tan^{-1} \dfrac{x + y}{1 - xy}$

ಅಂದರೆ , $$\boxed{\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x + y}{1 - xy}}$$

(ಇಲ್ಲಿ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ಮತ್ತು $xy < 1$)

(ii) ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $x = y$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{(x + x)}{1 - xx}$$

ಅಥವಾ $$\boxed{2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1 - x^2}}$$
ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

7. $x \geq 0$ ಮತ್ತು $y \geq 0$ ಆದಾಗ $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{(x - y)}{1 + xy}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\tan^{-1} x = \alpha$ ಮತ್ತು $\tan^{-1} y = \beta$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore x = \tan\alpha$ ಮತ್ತು $y = \tan\beta$

ಈಗ, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{x - y}{1 + xy}$

ಅಥವಾ $\alpha - \beta = \tan^{-1} \dfrac{(x-y)}{1+xy}$

ಅಥವಾ $\boxed{\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x-y}{1+xy}}$

8. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} [x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1} x = \alpha$ ಮತ್ತು $\sin^{-1} y = \beta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore x = \sin\alpha$ ಮತ್ತು $y = \sin\beta$

ಈಗ, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\sin(\alpha+\beta) = x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}\, y$

$\therefore \alpha + \beta = \sin^{-1} [x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}]$

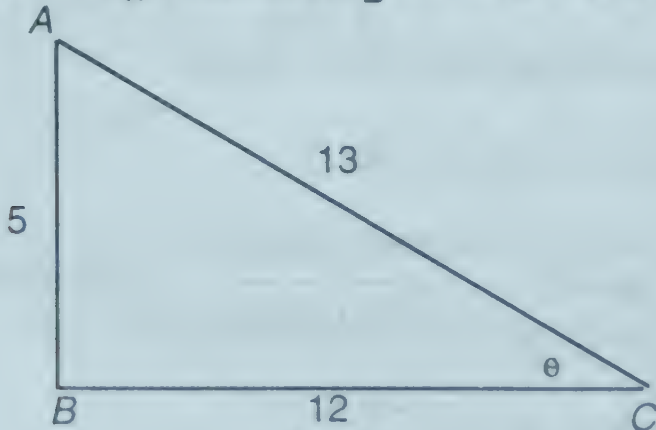
ಅಥವಾ $\boxed{\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} [x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}]}$

9. $\sin^{-1} \dfrac{5}{13} + \sin^{-1} \dfrac{1}{25} = \cos^{-1} \dfrac{253}{325}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1} \dfrac{5}{13} = \theta$ ಮತ್ತು $\sin^{-1} \dfrac{1}{25} = \phi$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\dfrac{5}{13} = \sin\theta$ ಮತ್ತು $\dfrac{7}{25} = \sin\phi$

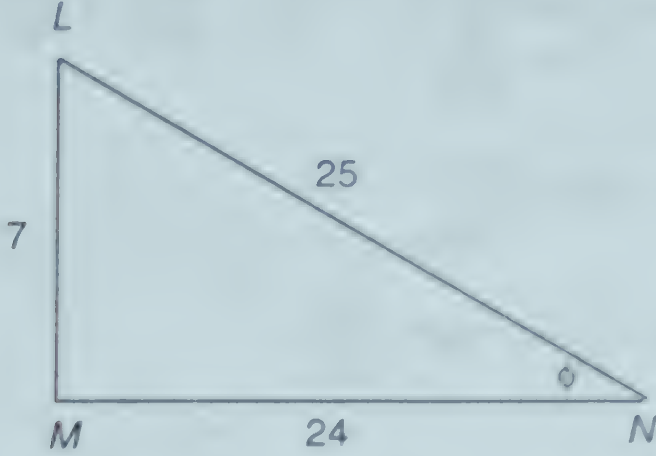
ABC. ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ *AB* = 5 ಮತ್ತು *AC* = 13 ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 8.1).



ಚಿತ್ರ 8.1

LMN ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, $LM = 7$ ಮತ್ತು $LN = 25$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 8.2).

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos\theta = \frac{12}{13}$ ಮತ್ತು $\cos\phi = \frac{24}{25}$



ಚಿತ್ರ 8.2

ಈಗ, $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta \ \cos\phi - \sin\theta \ \sin\phi$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{24}{25} - \frac{5}{13} \cdot \frac{7}{25}$$

$$= \frac{288 - 35}{325} = \frac{253}{325}$$

$$\therefore \theta + \phi = \cos^{-1} \frac{253}{325}$$

ಅಥವಾ $\sin^{-1} \frac{5}{13} + \sin^{-1} \frac{1}{25} = \cos^{-1} \frac{253}{325}$

10. $\tan^{-1} \frac{120}{119} = 2 \sin^{-1} \frac{5}{13}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\sin^{-1} \frac{5}{13} = \alpha$ ಎಂದಿರಲಿ

ಅಂದರೆ, $\frac{5}{13} = \sin\alpha \ \therefore \tan\alpha = \frac{5}{12}$

(ಚಿತ್ರ 8.1 ರಲ್ಲಿ θ ಬದಲಿಗೆ α ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ).

ಈಗ, $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{2\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\frac{25}{144}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{144}{119} = \frac{120}{119}$$

$$\therefore 2\alpha = \tan^{-1}\frac{120}{119}$$

ಅಂದರೆ, $2\sin^{-1}\frac{5}{13} = \tan^{-1}\frac{120}{119}$

11. $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\text{LHS} = 2\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right) - \left[\tan^{-1}\frac{1}{70} - \tan^{-1}\frac{1}{99}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{70} - \frac{1}{99}}{1+\frac{1}{99}\cdot\frac{1}{70}}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{5}{12} - \tan^{-1}\frac{29}{6931}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right) - \tan^{-1}\frac{29}{6931}$$

$$= \tan^{-1}\frac{120}{119} - \tan^{-1}\frac{29}{6931}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{120}{119} - \frac{29}{6931}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{29}{6931}}\right)$$

$$= \tan^{-1} \frac{828269}{828269} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

12. $$2 \tan^{-1} \left[\left[\frac{a-b}{a+b} \right]^{½} \tan \frac{x}{2} \right] = \cos^{-1} \left[\frac{b + a \cos x}{a + b \cos x} \right]$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\tan^{-1} \left[\left[\frac{a-b}{a+b} \right]^{½} \tan \frac{x}{2} \right] = \theta$$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \left[\frac{a-b}{a+b} \right]^{½} \tan \frac{x}{2} = \tan\theta$$

ಈಗ, $\cos 2\theta = \dfrac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \cos 2\theta = \frac{1 - \dfrac{a-b}{a+b} \tan^2 \dfrac{x}{2}}{1 + \dfrac{a-b}{a+b} \tan^2 \dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{(a+b) - (a-b) \tan^2 \dfrac{x}{2}}{(a+b) + (a-b) \tan^2 \dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{a+b - (a-b) \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\cos^2 \dfrac{x}{2}}}{a+b - (a-b) \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\cos^2 \dfrac{x}{2}}}$$

$$= \frac{(a+b)\ \cos^2 \frac{x}{2} - (a-b)\sin^2 \frac{x}{2}}{(a+b)\ \cos^2 \frac{x}{2} + (a-b)\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{a\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{a\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

ಅಂದರೆ, $\cos 2\theta = \dfrac{a \cos x + b}{a + b \cos x}$

$\therefore 2\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right]$

ಅಥವಾ $2\tan^{-1}\left[\left[\dfrac{a-b}{a+b}\right]^{½} \tan\dfrac{x}{2}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right]$

13. $\cos[\tan^{-1}\{\sin(\cot^{-1} x)\}] = \left[\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right]^{½}$. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

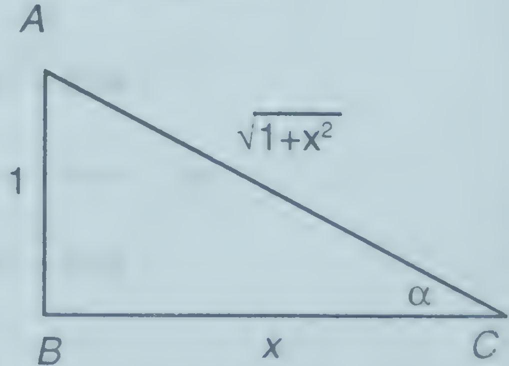
$\cot^{-1} x = \alpha$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ $x = \cot\alpha$

Δ^{le} ABC ಯಲ್ಲಿ $BC = x$, $AB = 1$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 8.3).

$\therefore \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\alpha = \sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



ಚಿತ್ರ 8.3

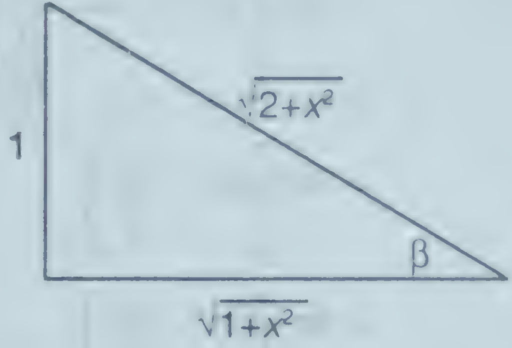
ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ

$$\text{LHS} = \cos\left[\tan^{-1} \sin \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]$$

$$= \cos\left(\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \cos \cos^{-1}\left[\frac{1+x^2}{2+x^2}\right]^{½} \qquad \text{(ಚಿತ್ರ 8.4)}$$

$$= \left[\frac{1+x^2}{2+x^2}\right]^{½} \equiv \text{RHS}$$



ಚಿತ್ರ 8.4

14. $\cos\left[2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right] = \sin\left[4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\tan^{-1}\frac{1}{7} = \alpha$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \text{LHS} = \cos\left[\tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right]$$

$$\left[\text{ಏಕೆಂದರೆ } 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$$

$$= \cos\left[\tan^{-1}\frac{7}{24}\right]$$

$$= \cos\left[\cos^{-1}\frac{24}{25}\right] = \frac{24}{25} \qquad \text{.... (1)}$$

$$RHS = \sin\left[2\left(2\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \sin\left[2\tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right]$$

$$= \sin\left[2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right]$$

$$= \sin\left[\tan^{-1}\frac{2.\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}\right]$$

$$= \sin\left[\tan^{-1}\frac{24}{7}\right]$$

$$= \sin\left[\sin^{-1}\frac{24}{25}\right] = \frac{24}{25} \quad .... (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

15. $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \alpha$ ಎಂದಿದ್ದರೆ

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\cos^{-1}\frac{x}{a} = \theta$ ಮತ್ತು $\cos^{-1}\frac{y}{b} = \phi$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{x}{a} = \cos\theta$ ಮತ್ತು $\frac{y}{b} = \cos\phi$

$\therefore \theta + \phi = \alpha$ (ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ)

ಅಥವಾ $\cos(\theta + \phi) = \cos\alpha$

ಅಂದರೆ $\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\ \sin\phi = \cos\alpha$

ಅಥವಾ $$\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} - \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right]^{½}\left[1 - \frac{y^2}{b^2}\right]^{½} = \cos\alpha$$

$$\therefore \left(\cos\alpha - \frac{xy}{ab}\right)^2 = \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right]\left[1 - \frac{y^2}{b^2}\right]$$

ಅಂದರೆ, $$\cos^2\alpha + \frac{x^2y^2}{a^2b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

ಅಥವಾ $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\,xy\cos\alpha}{ab} = \sin^2\alpha$$

16. $\tan^{-1} x = 2\tan^{-1}[\text{cosec}(\tan^{-1} x) - \tan(\cot^{-1} x)]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\tan^{-1} x = \theta$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore x = \tan\theta$

ಅಥವಾ $x = \cot\left[\frac{\pi}{2} - \theta\right]$

ಅಥವಾ $\cot^{-1} x = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$\text{RHS} = 2\tan^{-1}\left[\text{cosec}\,\theta - \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= 2\tan^{-1}[\text{cosec}\,\theta - \cot\theta]$$

$$= 2\tan^{-1}\left[\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left[\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\,\frac{\theta}{2} = \theta = \tan^{-1} x$$

$$= \text{LHS}$$

8.4 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

1. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \dfrac{\pi}{3}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

$\sin^{-1} x = \alpha$ ಮತ್ತು $\sin^{-1} 2x = \beta$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $x = \sin\alpha$ ಮತ್ತು $2x = \sin\beta$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\frac{\pi}{3}$$

ಅಥವಾ $\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \dfrac{1}{2}$

ಅಥವಾ $\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-4x^2} - x.2x = \dfrac{1}{2}$

ಅಥವಾ $\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)} = \dfrac{1}{2} + 2x^2$

ಅಥವಾ $(1-x^2)(1-4x^2) = \left[\dfrac{1}{2} + 2x^2\right]^2$

ಅಂದರೆ, $1-4x^2 - x^2 + 4x^4 = \dfrac{1}{4} + 4x^4 + 2x^2$

$\therefore 7x^2 = \frac{3}{4}$ ಅಥವಾ $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3/7}$

2. $\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1} + \tan^{-1}\frac{x-1}{x} = \tan^{-1}(-7)$ ಬಿಡಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x}}{1 - \frac{x+1}{x-1}\frac{x-1}{x}}\right) = \tan^{-1}(-7)$$

ಎಂದು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ

$$\frac{2x^2 - x + 1}{1 - x} = -7$$

ಅಥವಾ $2x^2 - 8x + 8 = 0$ ಅಥವಾ $x^2 - 4x + 4 = 0$

ಅಂದರೆ, $(x-2)^2 = 0$

$\therefore x = 2$

3. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} = \alpha$ ಬಿಡಿಸಿ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದಿಂದಾಗಿ

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ "ಕಾಂಪೊನೆಂಡೊ–ಎಟ್–ಡಿವಿಡೆಂಡೊ" ನಿಯಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{2\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

ಅಥವಾ $\frac{1+x^2}{1-x^2} = \left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}\right)^2$

ಅಥವಾ $\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore\ x^2 = \sin 2\alpha$

ಅಥವಾ $x = \pm\sqrt{\sin 2\alpha}$

4. $\sin[2\cos^{-1}\cot(2\tan^{-1}x)] = 0$ ಬಿಡಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\sin\left[2\cos^{-1}\cot\left(\cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x}\right)\right] = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $\sin\left[2\cos^{-1}\frac{1-x^2}{2x}\right] = 0$ .... (1)

ಈಗ $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{2x} = \alpha$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{1-x^2}{2x} = \cos\alpha$ .... (2)

$\therefore\ 2\cos^{-1}\frac{1-x^2}{2x} = 2\alpha$

ಈಗ, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore\ \cos 2\alpha = 2\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2 - 1$ [(2) ರಿಂದ]

ಅಥವಾ $\cos 2\alpha = \frac{1+x^4-4x^2}{2x^2}$

$\therefore\ 2\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1+x^4-4x^2}{2x^2}\right)$

ಅಥವಾ $2\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x} = \cos^{-1}\dfrac{1+x^4-4x^2.}{2x^2}$

(3) ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\sin\left[\cos^{-1}\frac{x^4-4x^2+1}{2x^2}\right] = 0$$

ಅಥವಾ $\sin\left[\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\dfrac{x^4-4x^2+1}{2x^2}\right)^2}\right] = 0$

ಅಥವಾ $4x^4-(x^4-4x^2+1)^2 = 0$

ಅಥವಾ $(x^4-6x^2+1)(x^4-2x^2+1) = 0$

ಅಂದರೆ, $x^4-6x^2+1 = 0$ ಅಥವಾ $x^4-2x^2+1 = 0$

ಅಂದರೆ, $x^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$ ಅಥವಾ $(x^2-1)^2 = 0$

ಅಂದರೆ, $x^2 = (1 \pm \sqrt{2})^2$ ಅಥವಾ $x = \pm 1$

ಅಂದರೆ, $x = \pm(1 \pm \sqrt{2})$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \pm 1, \pm(1 \pm \sqrt{2})$

ಅಭ್ಯಾಸ – 8

I ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\sin^{-1}(-1)$
2. $\cos^{-1}[\cos 600^\circ]$
3. $\cos^{-1}(\sin 225^\circ)$
4. $\cot\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$
5. $\sin\left[2\sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right]$
6. $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} + \cos^{-1}\dfrac{1}{x}$
7. $\cos^{-1}\dfrac{1}{5\sqrt{2}} - \sin^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{17}}$
8. $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$
9. $\cos^{-1}(\sin 220^\circ)$
10. $\sin^{-1}[\cos(-105^\circ)]$

11. $\sin\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$

12. $\sin(\tan^{-1} 2)$

13. $\cot^{-1}(\tan 100°)$

14. $\cos\left[\cos^{-1}\frac{15}{17} - \cos^{-1}\frac{7}{25}\right]$

II ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

1. $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} = \sin^{-1}\frac{77}{85}$

2. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

3. $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}} + \operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{41}}{4} = \frac{\pi}{4}$

4. $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

5. $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

6. $\tan\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\alpha > 0, \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ ಆದಾಗ $2\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

8. $\tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

9. $\tan^{-1}\left(\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{4}$

10. $\tan^{-1}\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{12}{5}$

11. $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$

12. $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$

13. $\tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

14. $\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right) = 0$

15. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ ಆದಾಗ $x+y+z = xyz$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $\sec^{-1}\sqrt{1+x^2} + \mathrm{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y} + \cot^{-1}\frac{1}{z} = 3\pi$

ಆದರೆ $x+y+z = xyz$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

III ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

1. $\sin^{-1}\frac{5}{x} + \sin^{-1}\frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$

2. $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$

3. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\,\mathrm{cosec}\,x)$

4. $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$

5. $\sin^{-1}2x - \sin^{-1}x\sqrt{3} = \sin^{-1}x$

6. $2\cot^{-1}5 + 2\cot^{-1}8 + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{4}$

7. $\cot^{-1}x + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4}$

8. $\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2\tan^{-1}x$

9. $2 \tan^{-1} (\cos x) = \tan^{-1} (2 \operatorname{cosec} x)$

10. $\tan^{-1} x + \cot^{-1} (x-1) = \sin^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{3}{5}$

11. $\cos^{-1} (2x^2-1) = 2 \cos^{-1} \frac{1}{2}$

12. $\sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{4} - \sin^{-1} x$

ಅಧ್ಯಾಯ – 9

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಅನೇಕ ಬಾರಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎದುರಾಗುವುವು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $4 \sin x + 3 \cos x = 5$

$\tan^2 x + \sec x = 2$

ಎಂಬುವು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

ಈಗ, $\cos x = \frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ, $x = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಆದರೆ, $x = \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$ ಬೆಲೆಗಳೂ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರವಾಗುತ್ತವೆ.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

9.2 $\sin x = k, -1 \leq k \leq 1$, ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$\sin x = k$ .... (1)

ಸಮೀಕರಣದ ಅತಿ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವು α ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \sin x = \sin \alpha$

ಅಥವಾ $\sin x - \sin \alpha = 0$

ಅಥವಾ $2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}=0$

$\therefore \cos\frac{x+\alpha}{2}=0$ ಅಥವಾ $\sin\frac{x-\alpha}{2}=0$

$\therefore \frac{x+\alpha}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ಅಥವಾ $\frac{x-\alpha}{2}=2n\frac{\pi}{2}$

ಅಂದರೆ, $x=(2n+1)\pi-\alpha$ .... (2)

ಅಥವಾ $x=2n\pi+\alpha$ .... (3)

ಈಗ, (2) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ನಾವು ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$\boxed{x=n\pi+(-1)^n\alpha}$ **(ಇಲ್ಲಿ $n\in I$, ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ)**

9.3 $\cos x=k, -1\le k\le 1$, ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$\cos x=k$ ... (1)

ಸಮೀಕರಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವು α ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \cos x=\cos\alpha$

ಅಥವಾ $\cos x-\cos\alpha=0$

ಅಥವಾ $-2\sin\frac{x+\alpha}{2}\,.\,\sin\frac{x-\alpha}{2}=0$

$\therefore \sin\frac{x+\alpha}{2}=0$ ಅಥವಾ $\sin\frac{x-\alpha}{2}=0$

$\therefore \frac{x+\alpha}{2}=2n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ಅಥವಾ $\frac{x-\alpha}{2}=2n\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ಅಂದರೆ, $x=2n\pi-\alpha$ ... (2)

ಅಥವಾ $x=2n\pi+\alpha$ ... (3)

ಈಗ, (2) ಮತ್ತು (3)ನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ನಾವು ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\boxed{x = 2n\pi \pm \alpha}, \ (n \in I)$$

9.4 tan *x* = *k*, $-\infty < k < \infty$, ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$\tan x = k$ .... (1)

ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವು α ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \tan x = \tan \alpha$

ಅಥವಾ $\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$

ಅಥವಾ $\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha = 0$

ಅಂದರೆ, $\sin (x-\alpha) = 0$

$\therefore x-\alpha = n\pi$

ಅಥವಾ $\boxed{x = n\pi+\alpha}$, $(n\in I)$

ಎಂಬುದು (1)ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

ಸೂಚನೆ: sin *x* ಮತ್ತು cosec *x*
cos *x* ಮತ್ತು sec *x*
tan *x* ಮತ್ತು cot *x*

ಈ ಜೊತೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

9.5 *a* cos *x* + *b* sin *x* = *c* ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$a \cos x + b \sin x = c$ .... (1)

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು $\sqrt{a^2+b^2}$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad .... (2)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$\cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ಅಥವಾ $\cos(x-\beta) = k$ $\left[\text{ಇಲ್ಲಿ } k = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

ಈಗ, α ವು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನಾವು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x - \beta = 2n\pi \pm \alpha$$

ಅಥವಾ $x = 2n\pi \pm \alpha + \beta,\ (n \in I)$

ಸೂಚನೆ: ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು

$$\sin\beta\cos x + \cos\beta\sin x = k$$

ಅಥವಾ $\sin(x+\beta) = k$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಹಾರವು α ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವು

$$x+\beta = n\pi + (-1)^n\alpha$$

ಅಥವಾ $\mathbf{x = n\pi + (-1)^n\alpha - \beta,\ n \in I}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$, $(n \in I)$

2. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$\cos x = \pm \frac{1}{2}$

ಅಂದರೆ (i) $\cos x = \frac{1}{2}$ ಅಥವಾ (ii) $\cos x = -\frac{1}{2}$

ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = 2\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $(n \in I)$.

3. $\tan 3\theta = \cot 7\theta$

ಇದನ್ನು $\tan 3\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 7\theta\right)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{\pi}{2} - 7\theta$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore 3\theta = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 7\theta$

ಅಥವಾ $\theta = \frac{1}{10}\left[n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in I$.

ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

4. $\cot^2\theta + \left[\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cot\theta + 1 = 0.$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $(\cot\theta + \sqrt{3})\left[\cot\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = 0$

ಎಂದು ಅಪವರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $\cot\theta + \sqrt{3} = 0$ ಅಥವಾ $\cot\theta + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$

$\therefore \cot\theta = -\sqrt{3}$ ಅಥವಾ $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ ಇಲ್ಲಿ $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{6}$ $\therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ: $\theta = n\pi - \frac{\pi}{6}, n\pi - \frac{\pi}{3}$ $(n \in I)$.

5. $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$(1 - \cos^2\theta) - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$$

ಅಥವಾ $(-\cos^2\theta) - 2\cos\theta + \frac{5}{4} = 0$

ಅಥವಾ $4\cos^2\theta + 8\cos\theta - 5 = 0$

ಅಥವಾ $2\cos\theta\ (2\cos\theta + 5) - 1\ (2\cos\theta + 5) = 0$

ಅಥವಾ $(2\cos\theta + 5)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore 2\cos\theta + 5 = 0$ ಅಥವಾ $2\cos\theta - 1 = 0$

π

ಅಂದರೆ, $\cos\theta = -\frac{5}{2}$ ಅಥವಾ $\cos\theta = \frac{1}{2} \therefore \alpha = \frac{}{3}$

$\cos\theta$ ದ ಬೆಲೆಯು -1 ಮತ್ತು 1ರ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಕಾರಣ $\frac{-5}{2}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವು $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

6. $\cot\theta + \tan\theta = 2\operatorname{cosec}\theta$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 2\cos\theta$

ಅಥವಾ $1 = 2\cos\theta \therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I.$

7. $\sin x - \cos x = \cos 3x - \sin 3x$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$\sin x + \sin 3x = \cos 3x + \cos x$

ಅಂದರೆ, $2\sin 2x \cos x = 2\cos 2x \cos x$

ಅಥವಾ $2\cos x\,[\sin 2x - \cos 2x] = 0$

$\therefore \cos x = 0$ ಅಥವಾ $\sin 2x = \cos 2x$ ಅಂದರೆ, $\tan 2x = 1$

ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\therefore\ 2x = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

ಅಥವಾ $x = \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ: $x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{8}, n \in I$

8. $\sin 4\theta \ \cos 2\theta \ + \cos 4\theta \ \sin 2\theta \ = 0$

ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$\dfrac{1}{2}\ [\sin 6\theta \ + \sin 2\theta] + \dfrac{1}{2}\ [\sin 6\theta \ - \sin 2\theta] = 0$

ಅಥವಾ $\sin 6\theta \ = 0 = \ \sin \alpha$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = 0$

$\therefore\ 6\theta \ = n\pi + (-1)^n (0) = n\pi$

ಅಂದರೆ, $\theta \ = \dfrac{n\pi}{6}$, $n \in I$, ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

9. $2\cos 3\theta \ + 6\cos\theta + 1 = 0.$

ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $\cos 3\theta$ ಎಂಬುದರ ವಿಸ್ತರಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ

$2\,[4\cos^3\theta - 3\cos\theta] + 6\cos\theta + 1 = 0$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$8\cos^3\theta + 1 = 0$

ಅಥವಾ $\cos^3\theta = -\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ \cos\theta \ = -\dfrac{1}{2} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \ \cos\dfrac{2\pi}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\theta = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$, $n \in I$, ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

10. $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3\sec^4\theta$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\operatorname{cosec}^2\theta$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} + 1 = \frac{3\sec^4\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\tan^2\theta + 1 = 3\tan^2\theta\sec^2\theta$$

ಅಥವಾ $3\tan^2\theta\sec^2\theta - \tan^2\theta - 1 = 0$

ಅಥವಾ $3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta) - \tan^2\theta - 1 = 0$

ಅಥವಾ $3\tan^4\theta + 2\tan^2\theta - 1 = 0$

ಈಗ, $\tan^2\theta = a$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$3a^2 + 2a - 1 = 0$$

ಅಥವಾ $3a^2 + 3a - a - 1 = 0$

ಅಥವಾ $3a(a+1) - 1(a+1) = 0$

ಅಥವಾ $(3a-1)(a+1) = 0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ

$a = \frac{1}{3}$ ಅಥವಾ $a = -1$

ಅಂದರೆ, $\tan^2\theta = +\frac{1}{3}$ ಅಥವಾ $\tan^2\theta = -1$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan = \pm\sqrt{-1}$

ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \pm\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in I$, ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

11. $3\sin x + 4\cos x = 2$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು $a\cos x + b\sin x = c$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$\sqrt{(3)^2 + (4)^2}$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = \frac{2}{5}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ

$\frac{3}{5} = \cos \beta$ ಮತ್ತು $\frac{4}{5} = \sin \beta$ ಎಂದಾಗಿರಲಿ

$\therefore \ \beta \approx 53^\circ 8'$.

ಈಗ, ಸಮೀಕರಣವು

$$\cos \beta \sin x + \sin \beta \cos x = \frac{2}{5}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\sin (x+\beta) = \frac{2}{5}$$

ಈಗ $\sin^{-1} \frac{2}{5} \approx 23^\circ 35'$. ಅಂದರೆ, $\alpha \approx 23^\circ 35'$

$\therefore \ x + 53^\circ 8' \approx n (180^\circ) + (-1)^n (23^\circ 35')$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ

$$x \approx n (180^\circ) + (-1)^n (23^\circ 35') - 53^\circ 8'$$

12. $\operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$

ಸಮೀಕರಣದ ಪದಗಳನ್ನು $\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ ಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆದಾಗ

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3}$$

ಅಥವಾ $1 + \cos x = \sqrt{3} \sin x$

ಅಂದರೆ, $\sqrt{3} \sin x - \cos x = + 1$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = +\frac{1}{2}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \text{ ಮತ್ತು } \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

ಎಂದು ಬರೆದಾಗ ಸಮೀಕರಣವು

$$\sin x \sin\frac{\pi}{3} - \cos x \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

ಅಥವಾ $\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $\cos\left[x + \frac{\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$$\therefore \; x + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

ಅಥವಾ $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}, \; n \in I$

ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

13. $2\sin^2 x + 4\sin x\cos x = 3$

$\cos^2 x$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಸಮೀಕರಣವು

$$2\tan^2 x + 4\tan x = 3\sec^2 x$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$2\tan^2 x + 4\tan x = 3(1 + \tan^2 x)$$

ಅಥವಾ $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$

ಅಥವಾ $(\tan x - 1)(\tan x - 3) = 0$

$\therefore \tan x = 1$ ಅಥವಾ $\tan x = 3$

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = 45°$ ಅಥವಾ $\alpha \approx 71°34'$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರ:

$x = n(180°) + 45°,\ n(180°) + 71°34',\ n \in I.$

ಅಭ್ಯಾಸ – 9

ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

I 1. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\sec\theta = 2$

4. $4\sin^2\theta = 3$

5. $2\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

6. $\sin 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

7. $\sin 9x = \sin x$

8. $\sin 2x = \cos 3x$

9. $\cot x = \tan 8x$

10. $\tan 2x \tan x = 1$

II 1. $\sin 4x - \sin 2x = \sin 6x$

2. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$

3. $\cos 2x + 5\cos x = 2$

4. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

5. $\sec^2\theta - (\sqrt{3} + 1)\tan\theta + \sqrt{3} - 1 = 0$

6. $\sec\theta - 1 = (\sqrt{2}-1)\tan\theta$

7. $2\cos 3\theta + 6\cos\theta + 1 = 0$

8. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$

9. $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$

10. $\tan x + 4\cot 2x + 1 = 0$

11. $\tan\theta = 1 - \sec 2\theta$

12. $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$

13. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

14. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

15. $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$

16. $2\cos x - 3\sin x = 2$

17. $5\cos x - 4\sin x = 6$

18. $\sqrt{3}(\tan\theta + \sin\theta) = 4$

19. $\cos\theta = \sqrt{3}(1-\sin\theta)$

20. $\sin 7\theta - \sqrt{3}\cos 4\theta = \sin\theta$

21. $\cot\theta - \tan\theta = 2$

22. $\sin 11\theta \sin 4\theta + \sin 5\theta \sin 2\theta = 0$

23. $\cos 3\theta + 8\cos^3\theta = 0$

24. $\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta = 2\sqrt{2}$

25. $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$

26. $2 \sin\theta \sin 3\theta = 1$

27. $\cos\theta - \sin\theta = \cos 2\theta$

28. $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

29. $\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

30. $\tan^3 \theta + \cot^3 \theta = 8 \operatorname{cosec}^3 2\theta + 12$

ಅಧ್ಯಾಯ – 10

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

10.1 ಪೀಠಿಕೆ

$x^2+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಗತ್ಯ ಮತ್ತು ಶೋಧನೆ ಉಂಟಾಯಿತು. $x^2=-1$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಲಿ, ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಲಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಆಗಲಿ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಿ ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ. ಈ ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗಮಾಡಿದಾಗಲೂ $\sqrt{-1}$ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು *ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ*ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು.

ಆಯ್ಲರ್ (1707-1783) ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞನು $\sqrt{-1}$ ಗೆ i ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿದನು. ಅಂದರೆ, $i=\sqrt{-1}$ ಮತ್ತು $i^2=-1$. ಇದರಿಂದ ಆತನು ಮೊದಲಬಾರಿಗೆ $x^2+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \therefore x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ *ಗೌಸ್* (1777-1855) ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞ $a+ib$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದನು.

10.2.1 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

a ಮತ್ತು b ಗಳು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ $a+ib$ ಯನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a ಯನ್ನು *ವಾಸ್ತವ ಭಾಗ* ಮತ್ತು b ಯನ್ನು *ಊಹ್ಯ ಭಾಗ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $2+7i,\ 4-5i,\ -3i,\ 5,\ \frac{1}{2}-\sqrt{3}\,i$

ಸೂಚನೆ: ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದ ಒಂದು ಉಪಗಣ.

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು *ಕ್ರಮನಿಯೋಜಿತ ಸಂಖ್ಯಾ ಯುಗ್ಮ* ಎಂದೂ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳಾಗಿ ಹೀಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು: (2,7), (4, –5), (0,–3), (5,0) ಮತ್ತು (½, $-\sqrt{3}$).

10.2.2 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಹವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ

$z = a + ib$ ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ

$\bar{z} = a - ib$ ಯನ್ನು z ನ ***ಸಹವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ*** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$z = 2+7i \qquad \bar{z} = 2-7i$

$z = 4-5i \qquad \bar{z} = 4+5i$

$z = -3i \qquad \bar{z} = 3i$

$z = 5 \qquad \bar{z} = 5$

10.2.3. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

(1) ಸಮಾನತೆ : $a+ib = c+id$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ $a=c$, $b=d$

(2) ಕೂಡುವಿಕೆ : $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

(3) ಕಳೆಯುವಿಕೆ : $(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$

(4) ಗುಣಾಕಾರ : $(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

(5) ಭಾಗಾಕಾರ : $$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id}$$

$$= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i\,\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

(6) $z = a+ib$ ಆದರೆ, $\bar{z} = a-ib$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore\ z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = (a^2+b^2) + i(ab-ab)$

ಅಂದರೆ, $z\bar{z} = a^2 + b^2$, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $a+ib$ ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

(i) $(2+3i)^2$ (ii) $\frac{2+5i}{7-7i}$

(iii) $\frac{1}{1+\cos\theta + i\sin\theta}$

(i) $(2+3i)^2 = 4+9i^2 + 12i$

$= 4 + 9(-1) + 12i$

$= -5 + 12i = (-5) + i\,(12)$

(ii) $\frac{2+5i}{7-7i} = \frac{2+5i}{7-7i} \times \frac{7+7i}{7+7i}$

$= \frac{(14-35) + i\,(14+35)}{7^2 + 7^2}$

$= \frac{-21 + i\,(49)}{98}$

$= \frac{-3+7i}{14}$

$= \left(\frac{-3}{14}\right) + i\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\frac{1}{1+\cos\theta + i\sin\theta}$

$= \frac{1}{(1+\cos\theta) + i\sin\theta} \times \frac{(1+\cos\theta) - i\sin\theta}{(1+\cos\theta) - i\sin\theta}$

$= \frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$$= \frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{2+2\cos\theta}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{2(1+\cos\theta)} - \frac{i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \Big/ 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i\tan\frac{\theta}{2}}{2}$$

2. $z = \frac{(1+i)(3+4i)}{2-i}$ ಆದರೆ $z+\bar{z}$ ಮತ್ತು $z\bar{z}$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $z = \frac{(1+i)(3+4i)}{2-i} = \frac{3-4+i(3+4)}{2-i} = \frac{-1+7i}{2-i}$

$$= \frac{-1+7i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$

$$= \frac{(-2-7) + i(14-1)}{4+1}$$

ಅಂದರೆ, $z = \frac{-9+13i}{5}$

$\therefore \quad \bar{z} = \frac{-9-13i}{5}$

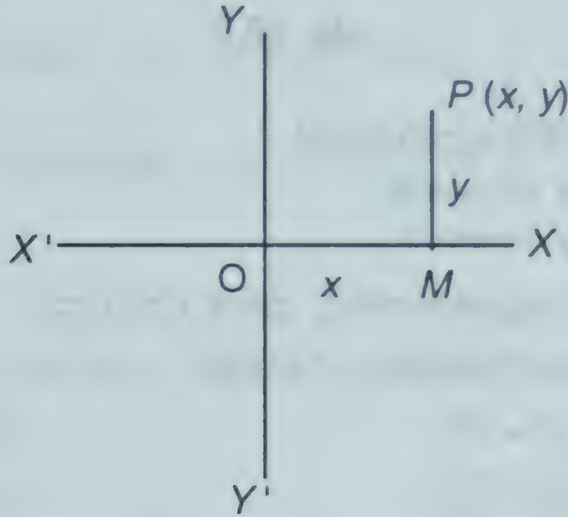
ಆದ್ದರಿಂದ, $z+\bar{z} = -\frac{9}{5} - \frac{9}{5} - \frac{18}{5}$

$z\bar{z} = \frac{-9-13i}{5} \times \frac{-9+13i}{5} = \frac{(-9)^2 - (13i)^2}{25}$

$$= \frac{81 + 169}{25} = \frac{250}{25} = 10$$

10.3 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆ – ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲ (ಅಥವಾ ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲ)

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $z = (a, b)$ ಯು ಒಂದು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ x–ಅಕ್ಷವನ್ನು *ವಾಸ್ತವ ಅಕ್ಷ*ವೆಂದೂ, y–ಅಕ್ಷವನ್ನು *ಊಹ್ಯ ಅಕ್ಷ*ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೂ, ಊಹ್ಯ ಭಾಗವನ್ನು ಊಹ್ಯ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೂ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಈ ಸಮತಲದ ಹೆಸರು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲ (ಕಾಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ಪ್ಲೇನ್) ಅಥವಾ *ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲ.*

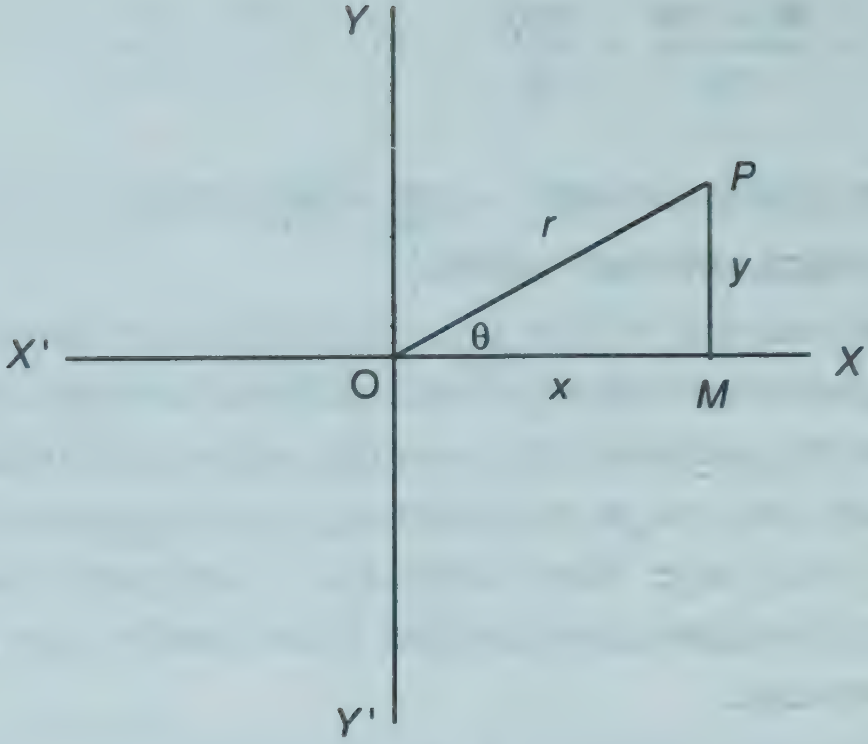


ಚಿತ್ರ 10.1

$z = x + iy$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ $P(x,y)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗುರುತಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 10.1)

10.4 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪ (ಪೋಲಾರ್ ಫಾರಂ)

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $z \equiv (x,y)$ ಅನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ $P(x,y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಸೂಚಿಸಲಿ. ಆಗ P ಯ ಕಾರ್ಟಿಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕ ಯುಗ್ಮವು (x,y) ಆಗುವುದು. ಮೂಲಬಿಂದು O ಮತ್ತು P ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. OP ಯು OX ನೊಂದಿಗೆ θ ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. $OP = r$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ, (r, θ) ಯುಗ್ಮವನ್ನು ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 10.2

ಚಿತ್ರ 10.2 ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರುವಂತೆ

$$x = r\cos\theta \quad \text{.... (1)}$$

$$y = r\sin\theta \quad \text{.... (2)}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವರ್ಗಿಸಿ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 = r^2$

ಅಂದರೆ, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು z ನ *ಮಾಡ್ಯುಲಸ್* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು $|z|$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore \; r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ಧ್ರುವೀಯ ಕೋನ θದ ಬೆಲೆಯನ್ನು $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ಮತ್ತು $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. θ ವನ್ನು z ನ *ಕೋನಾಂಕ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\theta = \arg z$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ $z = x+iy$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು *ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ರೂಪ* ಅಥವಾ *ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ : ಕೋನಾಂಕವಾದ θದ ಬೆಲೆಯು $-\pi$ ಮತ್ತು π ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. ಇದನ್ನು *ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯೆಂದು* ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಕೋನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

$\sin\theta$	$\cos\theta$	ಕೋನಾಂಕ
+	+	α
+	–	$\pi-\alpha$
–	+	$-\alpha$
–	–	$-(\pi-\alpha)$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sin\theta = +\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಇರಲಿ. ಈಗ, $\sin\theta = +\frac{1}{2}$ ಇರುವಂತಹ θದ ಲಘುಕೋನ ಬೆಲೆಯು $\frac{\pi}{6}$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಪ್ರಕಾರ, ಕೋನಾಂಕವು $\pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $-1 + i\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1+i}{1+\sqrt{3}\,i}$ (iii) $-1-i$

(i) $-1+i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore\ r\cos\theta = -1$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = \sqrt{3}$

ಇವುಗಳಿಂದಾಗಿ $r^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$ ಅಥವಾ $r = 2$.

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ $|z| = r = 2$ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕ $\arg z = \frac{2\pi}{3}$

(ii) $\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$= \frac{(1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})}{1+3}$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{(1-\sqrt{3})}{4}$

ಈಗ, $\frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{(1-\sqrt{3})}{4} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r\cos\theta = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ r^2 = \left[\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right]^2 + \left[\frac{(1-\sqrt{3})}{4}\right]^2$

ಅಥವಾ $r^2 = \frac{(1+3+2\sqrt{3}) + (1+3-2\sqrt{3})}{16} = \frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ಈಗ, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1+\sqrt{3}}{4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ಮತ್ತು $\sin\theta = \frac{1-\sqrt{3}}{4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೋನಾಂಕ $\theta = -15^\circ$

(iii) $-1-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r\cos\theta = -1$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = -1$

$\therefore\ r^2 = 2$ ಅಥವಾ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ $r = \sqrt{2}$

ಈಗ, $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ಮತ್ತು $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore\ \theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$$

2. $\frac{1+i}{1-i}$ ಅನ್ನು ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$

$$= \frac{1+i^2+2i}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

ಈಗ, $i = 0 + i.1 = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r\cos\theta = 0$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = 1$

$\therefore\ r^2 = 1$ ಅಥವಾ $r = 1$

ಈಗ $\cos\theta = 0, \sin\theta = 1\ \therefore\ \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ i = 1\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

3. $\frac{6i}{-3-3i}$ ಯನ್ನು ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $\frac{6i}{-3-3i} = \frac{6i}{-3-3i} \times \frac{-3+3i}{-3+3i}$

$$= \frac{-18i + 18i^2}{9+9}$$

$$= \frac{-18-18i}{18}$$

$$= -1-i$$

ಈಗ, $-1-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r\cos\theta = -1$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = -1$

$\therefore\ r^2 = 2$ ಅಥವಾ $r = \sqrt{2}$

ಈಗ, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಮತ್ತು $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore\ \theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{3\pi}{4}$$

ಅಂದರೆ, $-1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

4. $u + iv = \frac{2+i}{z+3}$ ಮತ್ತು $z = x+iy$ ಎಂದಾದರೆ
u ಮತ್ತು v ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಳ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $u + iv = \frac{2+i}{(x+iy)+3}$

$$= \frac{2+i}{(x+3)+iy}$$

$$= \frac{2+i}{(x+3)+iy} \times \frac{(x+3)-iy}{(x+3)-iy}$$

ಅಥವಾ $u+iv = \frac{2(x+3)+y+i(x+3-2y)}{(x+3)^2+y^2}$

$\therefore \quad u = \dfrac{2(x+3) + y}{(x+3)^2 + y^2}$ ಮತ್ತು $v = \dfrac{(x+3) - 2y}{(x+3)^2 + y^2}$

5. $z = a+ib$ ಆದರೆ $z\bar{z} = |z|^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $z\bar{z} = (a+ib)\,(a-ib)$

$= a^2 + b^2$

$= |z|^2$ (ಏಕೆಂದರೆ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

6. $z = a+ib$ ಆದರೆ $|z| = |\bar{z}|$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ಮತ್ತು $\bar{z} = a - ib$, $|\bar{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore \; |z| = |\bar{z}|$

7. $z_1 = a_1 + ib_1$ ಮತ್ತು $z_2 = a_2 + ib_2$ ಆದರೆ $|z_1 . z_2| = |z_1|.|z_2|$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $z_1.z_2 = (a_1,a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$\therefore |z_1 z_2| = \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2}$

$= \sqrt{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2}$

$= \sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2)^2 + b_1^2\,(b_2^2 + a_2^2)}$

$= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2)}$

$= |z_1|\,|z_2|$

8. z_1 ಮತ್ತು z_2 ಎಂಬುವವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ
amp $(z_1\, z_2)$ = (amp z_1) + (amp z_2)
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $z_1 = r_1\;[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$

ಮತ್ತು $z_2 = r_2\;[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\ z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos\theta_1 + i\sin\theta_1][\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

$= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)]$

$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$\therefore\ \text{amp } z_1 z_2 = \theta_1 + \theta_2 = (\text{amp } z_1) + (\text{amp } z_2)$

ಸೂಚನೆ: ಈ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು n ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ

(i) $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \ldots (\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots \theta_n)$

(ii) $|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1|\,|z_2| \ldots |z_n|$ ಮತ್ತು

(iii) $\text{amp } (z_1 z_2 \ldots z_n) = \text{amp } z_1 + \text{amp } z_2 + \ldots + \text{amp } z_n$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

10.5 ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

(i) ಕೂಡುವಿಕೆ ($z_1 + z_2$):

$P(x_1 y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ

ಈಗ, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ಆಗಿರಲಿ.

OP ಮತ್ತು OQ ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, $OPRQ$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು (ಚಿತ್ರ 10.3 ರಲ್ಲಿ) ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ. OR ಮತ್ತು PQ ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. ವಿಕರ್ಣಗಳಾದ OR ಮತ್ತು PQ ಗಳು S ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈಗ, S ಬಿಂದುವು PQ ವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

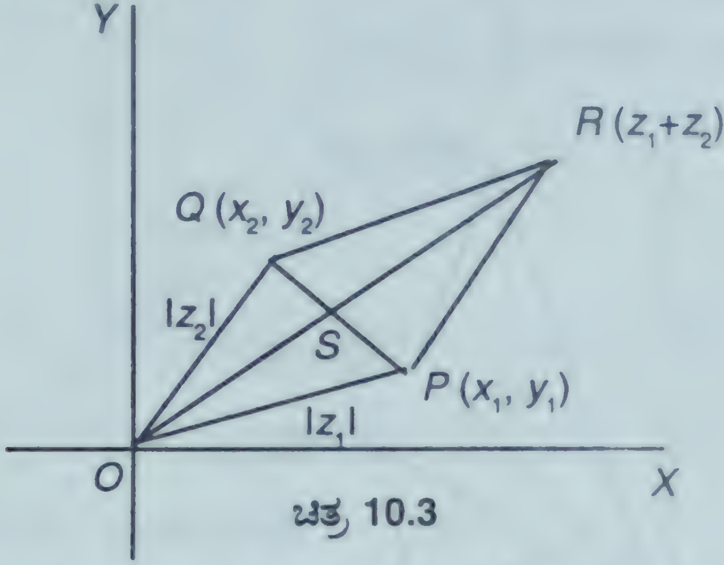
$$\therefore\ S \equiv \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$$

ಆದರೆ S ಬಿಂದುವು OR ನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಕೂಡ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, $O \equiv (0,0)$ ಮತ್ತು $S \equiv \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$ ಆದುದರಿಂದ

$R \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

ಅಂದರೆ, R ಬಿಂದುವು $[(x_1+x_2) + i(y_1+y_2)]$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, R ಬಿಂದುವು (z_1+z_2) ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. OP, OQ ಮತ್ತು OR ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $|z_1|, |z_2|$ ಮತ್ತು $|z_1+z_2|$ ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

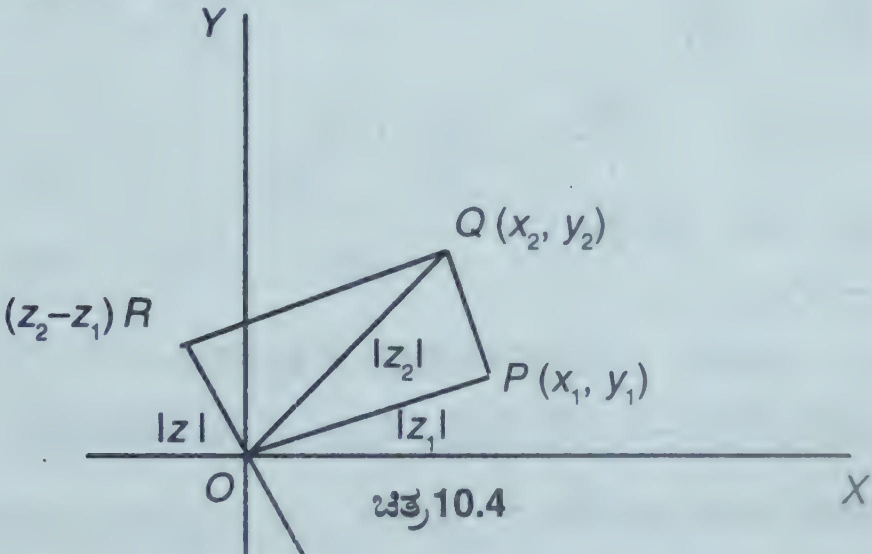


ಚಿತ್ರ 10.3

(ii) ಕಳೆಯುವಿಕೆ (z_1-z_2) : $P(x_1,y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2,y_2)$ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ ಮತ್ತು $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ಆಗಿರಲಿ. $OPRQ$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ. R ಬಿಂದುವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ z ನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ10.4). ಈ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶ (i) ರಿಂದ ನಮಗೆ $z_2 = z+z_1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \ z = z_2 - z_1$$

ಅಂದರೆ R ಬಿಂದುವು $z_2 - z_1$ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. RO ರೇಖೆಯನ್ನು R' ತನಕ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಅಷ್ಟೇ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಅಂದರೆ, $OR = OR'$ ಆದ್ದರಿಂದ R' ಬಿಂದುವು z_1-z_2 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ10.4

(iii) ಗುಣಾಕಾರ $(z_1.z_2)$:

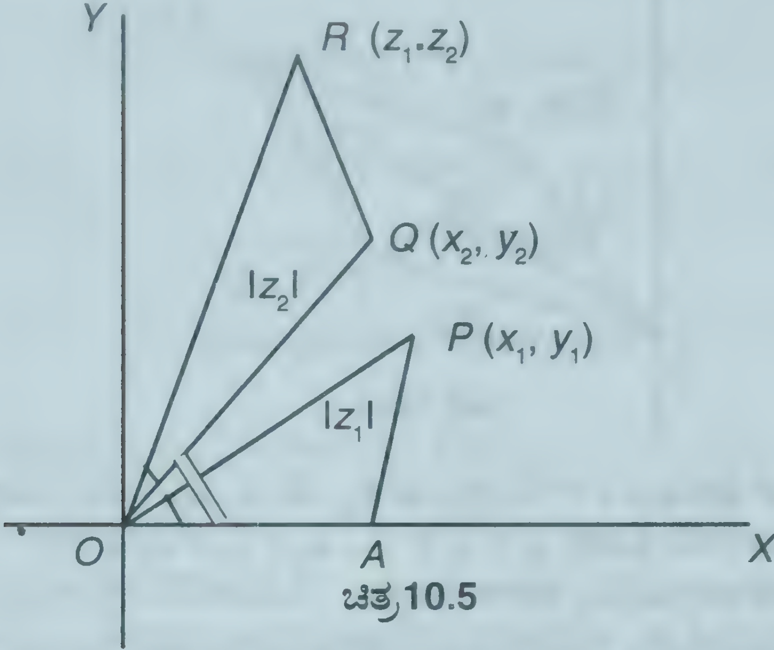
$P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.

$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

ಮತ್ತು $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ಆಗಿರಲಿ

$OP = r_1, \angle XOP = \theta_1$

$OQ = r_2, \angle XOQ = \theta_2$



ಚಿತ್ರ 10.5

ಮತ್ತು $OA = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. AP ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 10.5) $\angle ROQ = \angle POA = \theta_1$ ಮತ್ತು $\angle OQR = \angle OAP$ ಆಗಿರುವಂತೆ ORQ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

$\therefore \Delta^{le}\ OQR\ |||\ \Delta^{le}\ OAP$

$$\therefore \frac{OR}{OP} = \frac{OQ}{OA}$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{OR}{OP} = \dfrac{OQ}{1}$ $(\because OA = 1)$

ಅಥವಾ $OR = OP.OQ$

ಅಥವಾ $OR = r_1.r_2$

ಮತ್ತು $\angle ROX = \angle AOQ + \angle QOR = \theta_2 + \theta_1$

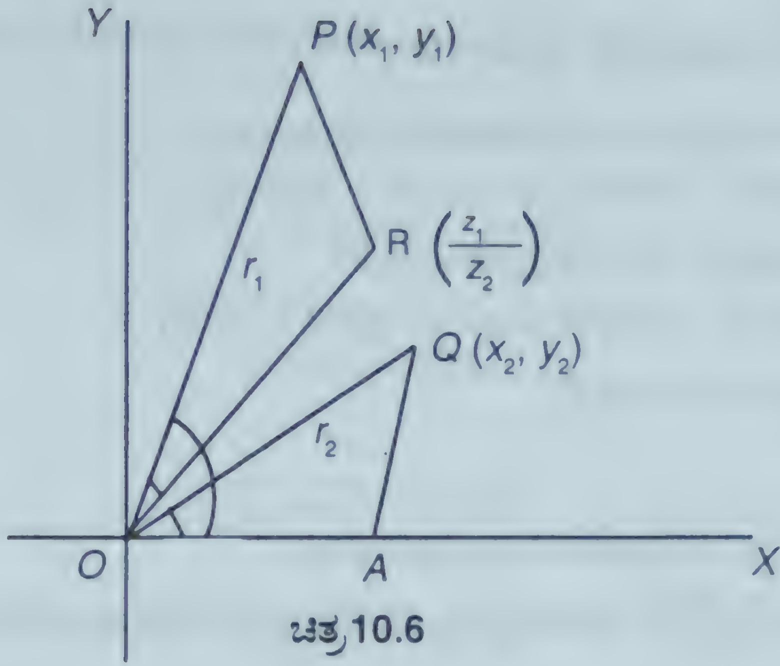
ಆದ್ದರಿಂದ, R ಬಿಂದುವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $z_1.z_2$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(iv) ಭಾಗಾಕಾರ z_1/z_2 $(z_2 \neq 0)$:

$P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.

$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

ಮತ್ತು $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 10.6

ಚಿತ್ರ 10.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$OA = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು A ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ.

$OP = r_1$, $\angle XOP = \theta_1$ ಮತ್ತು $OQ = r_2$, $\angle XOQ = \theta_2$ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle PQR = \angle QOA$ ಮತ್ತು $\angle ORP = \angle OAQ$ ಆಗುವಂತೆ ORP ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\Delta^{le}\, ORP \ |||\ \Delta^{le}\, OAQ$$

$$\therefore \frac{OR}{OA} = \frac{OP}{OQ}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{OR}{1} = \dfrac{OP}{OQ} \quad \therefore OR = \dfrac{r_1}{r_2}$

$$\angle ROX = \angle POX - \angle POR = \theta_1 - \theta_2$$

ಅಂದರೆ, Rನ ಕೋನಾಂಕವು $\theta_1 - \theta_2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆ R ಬಿಂದುವು ಸೂಚಿಸುವ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ $\dfrac{r_1}{r_2}$ ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋನಾಂಕವು $(\theta_1 - \theta_2)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, R ಬಿಂದುವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $\dfrac{z_1}{z_2}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

10.6 ಡಿಮೋಯ್ವರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ

(i) n ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(ii) n ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ

$\cos n\theta + i\sin n\theta$ ಎಂಬುದು $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ ನ

ಬೆಲೆಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ:

(i) n ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಡಿಮೋಯ್ವರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad .... (1)$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

$n = 1$ ಆದಾಗ ಸೂತ್ರ (1) ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

ಈಗ $n = m$ ಎಂದಾದಾಗ ಸೂತ್ರ (1) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಅಂದರೆ $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \qquad ..... (2)$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಕಡೆ $(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m . (\cos\theta + \sin\theta)$$
$$= (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ಅಂದರೆ, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{m+1} = \cos m\theta\cos\theta + i^2\sin m\theta\sin\theta$
$+ i(\cos m\theta\sin\theta + \sin m\theta\cos\theta)$

ಅಥವಾ $(\cos\theta + i\sin\theta)^{m+1} = (\cos m\theta\cos\theta - \sin m\theta\cos\theta)$
$+ i(\sin m\theta\cos\theta + \cos m\theta\sin\theta)$
$= \cos(m+1)\theta + i\sin(m+1)\theta$

ಅಂದರೆ, (1) ಸೂತ್ರವು $n = m+1$ ಎಂದಾದಾಗ ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ಫಲಿತಾಂಶವು ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) **n ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ.**

$n = -m$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ m ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಈಗ, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$

$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \quad (\because m \text{ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ})$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \times \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos m\theta - i\sin m\theta}$$

$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}$$

$$= \cos m\theta - i\sin m\theta$$

$$= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta \quad [\because -m = n]$$

ಆದ್ದರಿಂದ, n ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(iii) **n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿರಲಿ**

$n = \frac{p}{q}$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ ಹಾಗೂ q ವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $\left(\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta\right)^q = \cos\left[q.\frac{p}{q}.\theta\right] + i\sin\left[q.\frac{p}{q}\theta\right]$

$= \cos p\theta + i\sin p\theta$ (ಫಲಿತಾಂಶ (i) ರಿಂದ)

ಅಂದರೆ, $\left(\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta\right)^q = (\cos\theta + i\sin\theta)^p$

(ಫಲಿತಾಂಶ (i) ಅಥವಾ (ii) ರಿಂದ)

ಈಗ, ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲೂ q ನೇ ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ

$\left[\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta\right]$ವು $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ qನೇ ವರ್ಗಮೂಲ ತೆಗೆದಾಗ qಗಳಷ್ಟು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ನ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬೆಲೆಯು $\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆಗಳು:

(i) $n = -1$ ಆದಾಗ $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

(ii) $$\begin{aligned}(\cos\theta - i\sin\theta)^n &= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n\\ &= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\\ &= \cos n\theta - i\sin n\theta\end{aligned}$$

(iii) $(\sin\theta + i\cos\theta)^n \neq \sin n\theta + i\cos n\theta$

ಆದರೆ, $$\begin{aligned}(\sin\theta + i\cos\theta)^n &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^n\\ &= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿ

(i) $\dfrac{(\cos\theta - i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸರಳಗೊಳಿಸಬಹುದು:

$$\frac{[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}} = \frac{[(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}]^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-22}$$

$$= \cos 22\theta - i\sin 22\theta$$

(ii) $\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right]^{2/3}$

$$= \cos\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{3\pi}{2}\right] + i\sin\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{3\pi}{2}\right] = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

(iii) $\dfrac{(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^{7}(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^{-5}}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{12}(\cos 5\theta - i\sin 5\theta)^{-6}}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸರಳಗೊಳಿಸಬಹುದು :

$$\frac{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{-2}\right]^{7}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{3}\right]^{-5}}{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{4}\right]^{12}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{-5}\right]^{-6}}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-14}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-15}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{48}(\cos\theta + i\sin\theta)^{30}}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-29}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{78}}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-29-78}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-107}$$

$$= \cos 107\theta - i\sin 107\theta$$

2. $\left[\dfrac{1+\sin\phi + i\cos\phi}{1+\sin\phi - i\cos\phi}\right]^n = \cos\left[\dfrac{n\pi}{2} - n\phi\right] + i\sin\left[\dfrac{n\pi}{2} - n\phi\right]$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $\sin\phi + i\cos\phi = z$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $\sin\phi - i\cos\phi = \dfrac{1}{z}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \left[\frac{1+\sin\phi + i\cos\phi}{1+\sin\phi - i\cos\phi}\right]^n = \left(\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+z}{\frac{z+1}{z}}\right)^n = z^n = (\sin\phi + i\cos\phi)^n$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]$$

$$= \cos\left(n\frac{\pi}{2} - n\phi\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{2} - n\phi\right)$$

3. $2\cos\theta = x + \dfrac{1}{x}$ ಮತ್ತು $2\cos\phi = y + \dfrac{1}{y}$ ಆಗಿದ್ದರೆ

(i) $x^m y^n + \dfrac{1}{x^m y^n} = \cos(m\theta + n\phi)$

(ii) $\dfrac{x^m}{y^n} + \dfrac{y^n}{x^m} = 2\cos(m\theta - n\phi)$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $2\cos\theta = x + \dfrac{1}{x}$

$\therefore \; 2x\cos\theta = x^2 + 1$

ಅಥವಾ $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$

$$\therefore \; x = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

$$= \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$$

ಅಂದರೆ, $x = \cos\theta \pm i\sin\theta$

ಈಗ, $x = \cos\theta + i\sin\theta$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$y = \cos\phi + i\sin\phi$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \; x^m = (\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \quad \text{.... (1)}$$

ಮತ್ತು $y^n = (\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$ .... (2)

ಮೇಲಿನ (1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ

(i) $x^m y^n = (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos n\phi + i\sin n\phi)$

$$= \cos(m\theta + n\phi) + i\sin(m\theta + n\phi) \quad \text{.... (3)}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{1}{x^m.y^n} = \cos(m\theta + n\phi) - i\sin(m\theta + n\phi)$ .... (4)

(3) ಮತ್ತು (4) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\theta + n\phi)$$

ಈಗ, $\frac{x^m}{y^n} = \frac{\cos m\theta + i\sin m\theta}{\cos n\phi + i\sin n\phi}$ [(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ]

$$= (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos n\phi - i\sin n\phi)$$

$$= (\cos m\theta + i\sin m\theta)[(\cos(-n\phi) + i\sin(-n\phi))]$$

$$= \cos(m\theta - n\phi) + i\sin(m\theta - n\phi) \quad \text{... (5)}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{y^n}{x^m} = \frac{\cos n\phi + i\sin n\phi}{\cos m\theta + i\sin m\theta}$

$$= \cos(n\phi - m\theta) + i\sin(n\phi - m\theta)$$

$$= \cos(m\theta - n\phi) - i\sin(m\theta - n\phi) \quad \text{... (6)}$$

(5) ಮತ್ತು (6) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$\frac{x^m}{y^n} + \frac{y^n}{x^m} = 2\cos(m\theta - n\phi)$$

4. n ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{n/2+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $r = \sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore 1+i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n = (\sqrt{2})^n \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right] \quad \ldots (1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$$(1-i)^n = (\sqrt{2}) \left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n = (\sqrt{2})^n \left[\cos n\frac{\pi}{4} - i\sin n\frac{\pi}{4}\right] \quad \ldots (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$= 2^{(n/2)+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

5. $(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = 32$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $1+i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $r = 2$ ಮತ್ತು $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore\ (1+i\sqrt{3})^5 = 2^5\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^5$$

$$= 2^5\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right] \quad ...(1)$$

$$(1-i\sqrt{3})^5 = 2^5\left[\cos 5\frac{\pi}{3} - i\sin\ 5\frac{\pi}{3}\right] \quad ...(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = 2.2^5\ \cos 5\frac{\pi}{3}$$

$$= 2^6 \cos\left[2\pi - \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 2^6 \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 2^6.\frac{1}{2} = 2^5 = 32$$

6. α ಮತ್ತು βಗಳು $x^2-2x+4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos n\frac{\pi}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

ಅಥವಾ $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$

ಅಂದರೆ, $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\beta = 1 - i\sqrt{3}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore\ \alpha = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right],\ \alpha^n = 2^n\left[\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3}\right]$$

ಮತ್ತು $\beta = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right], \beta^n = 2^n\left[\cos n\frac{\pi}{3} - i\sin n\frac{\pi}{3}\right]$

$\therefore \alpha^n + \beta^n = 2.2^n \cos n\frac{\pi}{3} = 2^{n+1} \cos n\frac{\pi}{3}$

7. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$ ಆದರೆ

(i) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

(ii) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$

ಮತ್ತು $i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 0$

$\therefore \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 0$

ಅಂದರೆ,

$(\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\beta + i\sin\beta) + (\cos\gamma + i\sin\gamma) = 0$ ... (1)

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$(\cos\alpha - i\sin\alpha) + (\cos\beta - i\sin\beta) + (\cos\gamma - i\sin\gamma) = 0$ ... (2)

ಈಗ, $x+y+z = 0$ ಆದಾಗ $(x+y+z)^2 = 0$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0$ ... (3)

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ ಆದಾಗ

$$\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 0$$

ಅಥವಾ $xy + yz + zx = 0$ ... (4)

ಫಲಿತಾಂಶ (3) ರಲ್ಲಿ (4) ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$x^2+y^2+z^2+2(0)=0$$

ಅಥವಾ $x^2+y^2+z^2=0$

ಈಗ $x=\cos\alpha+i\sin\alpha, \quad \frac{1}{x}=\cos\alpha-i\sin\alpha$

$$y=\cos\beta+i\sin\beta, \quad \frac{1}{y}=\cos\beta-i\sin\beta$$

$$z=\cos\gamma+i\sin\gamma, \quad \frac{1}{z}=\cos\gamma-i\sin\gamma$$

ಆಗಿರಲಿ. (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$x+y+z=0$$

ಮತ್ತು $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=0$$

ಅಂದರೆ, $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2+(\cos\beta+i\sin\beta)^2+(\cos\gamma+i\sin\gamma)^2=0$

ಅಥವಾ $(\cos2\alpha+i\sin2\alpha)+(\cos2\beta+i\sin2\beta)+(\cos2\gamma+i\sin2\gamma)=0$

ಅಥವಾ $(\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma)+i(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)=0$

$\therefore \cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=0$ .... (5a)

ಮತ್ತು $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=0$ .... (5b)

ಫಲಿತಾಂಶ (5a) ಇಂದ

$$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)=0$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$$

8. $x=\cos\theta+i\sin\theta$ ಮತ್ತು $\sqrt{1-c^2}=nc-1$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$1+c\cos\theta = \frac{c}{2n}(1+nx)\left[1+\frac{n}{x}\right]$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\sqrt{1-c^2} = nc-1$

$\therefore\ 1-c^2 = (nc-1)^2 = n^2c^2+1-2nc$

ಅಥವಾ $2nc = n^2c^2+c^2$

ಅಥವಾ $2n = c(n^2+1)$

ಅಥವಾ $1 = \frac{c}{2n}(1+n^2)$ ... (1)

ಈಗ, $x+\frac{1}{x} = (\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta) = 2\cos\theta$ .. (2)

ಈಗ, $\frac{c}{2n}(1+nx)\left[1+\frac{n}{x}\right] = \frac{c}{2n}\left(1+\frac{n}{x}+nx+n^2\right)$

$$= \frac{c}{2n}\left[1+n^2+n\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{c}{2n}\left[1+n^2+n(2\cos\theta)\right]$$ [(2) ರಿಂದ]

$$= \frac{c}{2n}[1+n^2]+c\cos\theta$$

$$= 1+c\cos\theta$$ [(1) ರಿಂದ]

10.7 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘಾತ ಮೂಲಗಳು

$z = a+ib$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ ನಾವು $z^{1/q}$ ಎಂಬುದು q ಭಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$z = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore\ z^{1/q} = r^{1/q}\ (\cos\theta + i\sin\theta)^{1/q}$

ಈಗ, $\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$

ಮತ್ತು $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore\ z^{1/q} = r^{1/q}\ [\cos(2n\pi + \theta) + i\sin(2n\pi + \theta]^{1/q}$

ಡಿಮೋಯ್ವ್ರರನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$[\cos(2n\pi + \theta) + i\sin(2n\pi + \theta)]^{1/q}$ ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯು

$$\cos\frac{2n\pi + \theta}{q} + i\sin\frac{2n\pi + \theta}{q}$$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n = 0,1,2\ldots, q-1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

$$z^{1/q} = r^{1/q}\left[\cos\left(\frac{2n\pi + \theta}{q}\right) + i\sin\left(\frac{2n\pi + \theta}{q}\right)\right] \quad \ldots.\ (1)$$

ಎಂಬ q ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

(1) ರಿಂದ $a+ib$ ಯ q ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅವುಗಳು ಯಾವುವೆಂದರೆ

$$n = 0 :\ r^{1/q}\left[\cos\frac{\theta}{q} + i\sin\frac{\theta}{q}\right]$$

$$n = 1 :\ r^{1/q}\left[\cos\left(\frac{2\pi + \theta}{q}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi + \theta}{q}\right)\right]$$

$$n = 2 :\ r^{1/q}\left[\cos\left(\frac{4\pi + \theta}{q}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi + \theta}{q}\right)\right]$$

$$n = q-1 :\ r^{1/q}\left[\cos\frac{2(q-1)\pi + \theta}{q} + i\sin\frac{2(q-1)\pi + \theta}{q}\right]$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ರಲ್ಲಿ $n = q, q+1, ...$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಮೇಲಿನ ಬೆಲೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಹೀಗೆ, $(a+ib)$ ಯ q ಮೂಲಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರ (1) ರಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $(1-i\sqrt{3})^{1/5}$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $1-i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $1 = r\cos\theta$ ಮತ್ತು $-\sqrt{3} = r\sin\theta \therefore\ r = 2,\ \theta = -\frac{\pi}{3}$

$$\therefore\ 1-i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

ಅಥವಾ $1-i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$\therefore\ (1-i\sqrt{3})^{1/5} = 2^{1/5}\left[\cos\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]^{1/5}$$

$$= 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{2n\pi - \frac{\pi}{3}}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2n\pi - \frac{\pi}{3}}{5}\right)\right]$$

$n = 0, 1, 2, 3, 4$

$$= 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{6n\pi - \pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{6n\pi - \pi}{15}\right)\right]$$

$n = 0, 1, 2, 3, 4$

ಈ ಬೇರೆ ಬೇರೆ 5 ಬೆಲೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$$n = 0\ :\ 2^{1/5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)\right]$$

$$n = 1 \ : 2^{1/5} \left[\cos \frac{5\pi}{15} + i \sin \frac{5\pi}{15} \right]$$

$$n = 2 : 2^{1/5} \left[\cos \frac{11\pi}{15} + i \sin \frac{11\pi}{15} \right]$$

$$n = 3 : 2^{1/5} \left[\cos \frac{17\pi}{15} + i \sin \frac{17\pi}{15} \right]$$

$$n = 4 : 2^{1/5} \left[\cos \frac{23\pi}{15} + i \sin \frac{23\pi}{15} \right]$$

2. $(8i)^{1/3}$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $8i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $0 = r\cos\theta$ ಮತ್ತು $8 = r\sin\theta \ \therefore \ r = 8, \ \theta = \frac{\pi}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $8i = 8\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

ಅಥವಾ $8i = 8\left[\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$\therefore (8i)^{1/3} = 8^{1/3}\left[\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right]^{1/3} \quad n = 0,1,2$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{4n\pi + \pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4n\pi + \pi}{6}\right)\right] \quad n = 0,1,2$$

ಈ ಮೂರು ಘನಮೂಲಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$$n = 0 \ : \ 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right] = \sqrt{3} + i$$

$$n = 1 \ : 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right] = -\sqrt{3} + i$$

$$n = 2 \ : \ 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 2\ (0 - i.1) \ = \ -2i$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i$ ಮತ್ತು $-2i$ ಇವುಗಳು $(8i)^{1/3}$ ರ ಬೆಲೆಗಳು.

3. $-\sqrt{3} - i$ ಯ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ.

ಈಗ, $-\sqrt{3} - i \ = r\ (\cos\theta + i\sin\theta)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $r\cos\theta = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $r\sin\theta = -1$

$$\therefore \ r = 2, \ \theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $-\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$$\therefore (-\sqrt{3} - i)^{1/3} = 2^{1/3}\left[\cos\left(2n\pi - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2n\pi - \frac{5\pi}{6}\right)\right]^{1/3}$$

$$n = 0, 1, 2$$

$$= 2^{1/3}\left[\cos\left(\frac{12n\pi - 5\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{12n\pi - 5\pi}{18}\right)\right]$$

$$n = 0 \ : \ 2^{1/3}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{18}\right) + \ i\sin\left(-\frac{5\pi}{18}\right)\right]$$

$$n = 1 : \ 2^{1/3}\left[\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right]$$

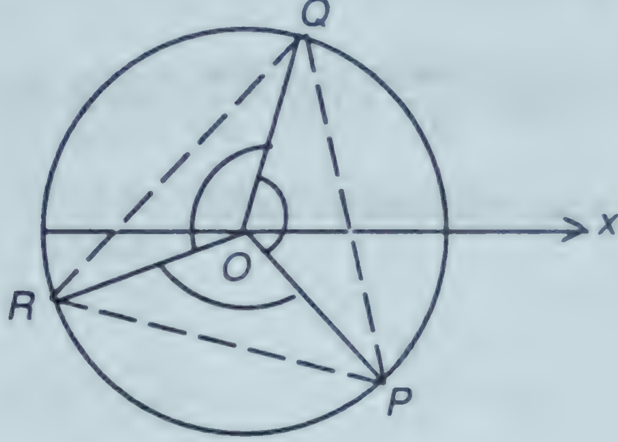
$$n = 2 : \ 2^{1/3}\left[\cos\frac{19\pi}{18} + i\sin\frac{19\pi}{18}\right]$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ: $2^{1/3}$ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದರ ಕೇಂದ್ರ O ಆಗಿರಲಿ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 3 ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು x – ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ $-5\pi/18, 7\pi/18$ ಮತ್ತು $19\pi/18$ ಎಂಬ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು P, Q ಮತ್ತು

R ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಈಗ *P*, *Q*, ಮತ್ತು *R* ಬಿಂದುಗಳು $(-\sqrt{3}-i)$ ನ ಘನ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ

$$\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP = \frac{2\pi}{3}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿಬೇಕು. ಅಂದರೆ, *PQR* ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 10.7).



ಚಿತ್ರ 10.7

4. $x^7-x^4-x^3+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು:

$$x^4(x^3-1) - 1(x^3-1) = 0$$

ಅಥವಾ $(x^4-1)(x^3-1) = 0$

ಅಥವಾ $x^4 = 1,\ x^3 = 1$

$\therefore\ x = (1)^{1/4},\ x = (1)^{1/3}$

ಈಗ, $1 = 1 + i(0) = [\cos(0) + i\sin(0)]$

ಅಥವಾ $1 = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi$

ಮತ್ತು $1^{1/4} = \cos\frac{2n\pi}{4} + i\sin\frac{2n\pi}{4}, \quad n = 0, 1, 2, 3$

ಆಗ, ಬರುವ ಚತುರ್ಘಾತ ಮೂಲಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$n = 0 : 1$

$n = 1 : i$

$n = 2 : -1$

$n = 3 : -i$

ಹಾಗೆಯೇ, $1^{1/3} = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$, $n = 0, 1, 2$

ಇದರಿಂದಾಗಿ ಬರುವ ಘನಮೂಲಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$n = 0 : 1$

$n = 1 : -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n = 2 : -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$\pm 1, \pm i, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

5. $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಈಗ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $(x-1)$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $x=1$.

ಅಂದರೆ, ಸಮೀಕರಣವು

$x^7-1 = 0$ ಅಥವಾ $x = (1)^{1/7}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore\ x = (1)^{1/7} = \cos\frac{2n\pi}{7} + i\sin\frac{2n\pi}{7}$, $n = 0, 1, 3, 4, 5, 6$

ಈಗ 7 ಮೂಲಗಳ ಪೈಕಿ, $n=0$ ಆದಾಗ $x=1$ ಎಂಬ ಮೂಲವು ಬರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇನ್ನುಳಿದ 6 ಮೂಲಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

6. $x^{10}+11x^5-1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$\pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\cos\frac{2n\pi}{5} + i\sin\frac{2n\pi}{5}\right]$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $x^5=a$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು

$$a^2+11a-1=0$$

ಎಂಬ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ a=\frac{-11\pm\sqrt{121+4}}{2}$$

ಅಥವಾ $x^5=\dfrac{-11\pm\sqrt{125}}{2}$

ಅಥವಾ $x^5=\dfrac{-176\pm 80\sqrt{5}}{32}$ (16 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

ಅಥವಾ $x^5=\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$ $[\cos 2n\pi \pm i\sin 2n\pi]$

$$\therefore\ x=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\cos\frac{2n\pi}{5} \pm i\sin\frac{2n\pi}{5}\right]\quad n=0,1,2,3,4$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 10

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು $a+ib$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

(i) $(2+3i)(3-2i)$

(ii) $\dfrac{3}{4+3i}+\dfrac{i}{3-4i}$

(iii) $\dfrac{1}{i(i+1)}$

(iv) $\dfrac{(2+i)(3-4i)}{1+2i}$

(v) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಮಾಡ್ಯುಲಸ್–ಕೋನಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

(i) $1+i\sqrt{3}$ (ii) $\frac{-2}{-\sqrt{3}+i}$ (iii) $\frac{6i}{-3-3i}$

(iv) -8 (v) $\frac{1+2i}{2-i}$

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಡಿಮೋಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) $(1+i\sqrt{3})^4$ (ii) $(-1+i)^{10}$ (iii) $(\sqrt{3}-i)^5$

(iv) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^9$ (v) $(\sqrt{2}+i)^4 + (\sqrt{2}-i)^4$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯರಿ

(i) $$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)^{10} + \left(\cos\frac{\pi}{15}-i\sin\frac{\pi}{15}\right)^{10}}{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

(ii) $$\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4}{(\sin\alpha + i\cos\alpha)^5}$$

(iii) $$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{11/2}}{\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{1/2}}$$

(iv) $\dfrac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5 \quad (\cos\theta - i\sin\theta)^3}{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{11} \quad (\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^5}$

(v) $\left[\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}}{1+\cos\dfrac{\pi}{8} - i\sin\dfrac{\pi}{8}}\right]^8$

(vi) $\left[\dfrac{1+\sin\dfrac{\pi}{8} + i\cos\dfrac{\pi}{8}}{1+\sin\dfrac{\pi}{8} - i\cos\dfrac{\pi}{8}}\right]^{1/2}$

5. $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$
$z = \cos\gamma + i\sin\gamma$ ಮತ್ತು $u = \cos\delta + i\sin\delta$ ಆದಾಗ

$(x+y)(z+u)$

$$= 4\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma-\delta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right]$$

ಮತ್ತು $\dfrac{1}{(x-y)(z-u)}$

$$= \frac{-1}{4}\operatorname{cosec}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{cosec}\frac{\gamma-\delta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} - i\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right]$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $2\cos\theta = x + \dfrac{1}{x}$ ಮತ್ತು $2\cos\phi = y + \dfrac{1}{y}$ ಆದಾಗ

$$2\cos(\theta+\phi) = xy + \frac{1}{xy}$$

$$2\sin(\theta+\phi) = xy - \frac{1}{xy}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n + (1+\cos\theta - i\sin\theta)^n = 2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos n\frac{\theta}{2}$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. $(a+ib)^{m/n} + (a-ib)^{m/n} = 2(a^2+b^2)^{m/2n}\cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. $p = \cos\theta + i\sin\theta$ ಮತ್ತು $q = \cos\phi + i\sin\phi$ ಎಂದಾದರೆ

$$\frac{p-q}{p+q} = i\tan\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $\cos\alpha + 2\cos\beta + 3\cos\gamma = 0 = \sin\alpha + 2\sin\beta + 3\sin\gamma$ ಆದಾಗ
$\cos3\alpha + 8\cos3\beta + 27\cos3\gamma = 18\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
ಮತ್ತು $\sin3\alpha + 8\sin3\beta + 27\sin3\gamma = 18\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11. $[\cos\theta + \cos\phi + i(\sin\theta + \sin\phi)]^n + [\cos\theta + \cos\phi - i(\sin\theta + \sin\phi)]^n$

$= 2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cos n\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(-1+i)^{1/3}$ (ii) $(\sqrt{3}+3)^{1/3}$ (iii) $(i)^{1/4}$

(iv) $(-1)^{1/3}$ (v) $(-2-2i)^{1/4}$ (vi) $(1-i\sqrt{3})^{1/3}$

13. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x^6+x^4-x^2-1 = 0$

(ii) $x^9-x^5+x^4-1 = 0$

(iii) $x^{12}-x^6+1 = 0$

14. $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{3/4}$ ಇದರ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $x^2-2x-4 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿದ್ದರೆ

$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos n\frac{\pi}{3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. $p = \dfrac{(1+i)\sqrt{3}-(1-i)}{2\sqrt{2}}$ ಆದರೆ

$p^{1/6}$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಆರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 11

ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಕಲನ ಕ್ರಿಯೆ

11.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಮುಖ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದೆ. ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇವುಗಳ ಕಲ್ಪನೆ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸ ಲಾಗಿದೆ. ಪುನಾರಾವರ್ತನೆಗಾಗಿ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಮಿತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನೂ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

11.2 ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿ

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $f(x) = x^2$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಮೊದಲಿಗೆ, $x \to 10$ ಆದಾಗ x^2 ನ ಮಿತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಸೂಚನೆ ಏನೆಂದರೆ, $x = 10$ ಆದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಗೂ ಮಿತಿಗೂ ಏನೂ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ $x = 10$ ರ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಮಿತಿಯು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಮಿತಿ ಇದ್ದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ ದತ್ತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನವು (x^2) ಅದರ ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

$x = 9.9$ ಆದರೆ $x^2 = 98.01$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$x = 9.99$ ಆದರೆ $x^2 = 99.8001$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$x = 9.999$ ಆದರೆ $x^2 = 99.980001$ ಆಗುತ್ತದೆ.

10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು x ಚರಾಂಕವು 10 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ x^2 ಸಹ 100ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಾ ಇದೆ ಎಂದು ಈ ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. $x \to 10$ ಆದಾಗ $x \to 100$. x ನ ಬೆಲೆ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಕೊಟ್ಟು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

$x = 10.1$ ಆದರೆ $x^2 = 102.01$ ಆಗುತ್ತದೆ;

$x = 10.01$ ಆದರೆ $x^2 = 100\,.\,2001$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು

$x = 10.001$ ಆದರೆ $x^2 = 100\,.\,020001$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ x ನ ಬೆಲೆ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 10ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ x^2 ನ ಬೆಲೆ 100 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದೆ.

x	x^2	$\|x^2-100\|$	$\|x-10\|$
9.9	98.01	1.99	0.1
9.99	99.8001	0.1999	0.01
9.999	99.980001	0.019999	0.001
10.001	100.020001	0.020001	0.001
10.01	100.2001	0.2001	0.01
10.1	102.01	2.01	0.1

x ನ ಬೆಲೆಯು 9.9 ಮತ್ತು 10.1 ರ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವಾಗ ($x = 10$ ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು) x^2 ಮತ್ತು 100 ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2.01 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಲ್ಲ.

(i) $9.9 < x < 10.1$ ಆದಾಗ $0 < |x^2 - 100| < 2.01$

(ii) $9.99 < x < 10.01$ ಆದಾಗ $0 < |x^2 - 100| < 0.2001$

(iii) $9.999 < x < 10.001$ ಆದಾಗ $0 < |x^2 - 100| < 0.020001$

ಮೇಲಿನ ಮೂರೂ x ನ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂತರವೂ $x = 10$ನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅಂತರದ ಉದ್ದವು ಕಡಿಮೆ ಆದಂತೆಲ್ಲಾ $|x^2-10|$ ರ ಮೇರೆಯೂ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಬಂದಿದೆ.

ಅಲ್ಲದೆ, ಪಟ್ಟಿಯ 3 ನೇ ಮತ್ತು 4 ನೇ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ 10ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ x^2 ನ ಬೆಲೆ 100 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿದೆ. $|x-10|$ ರ ಬೆಲೆ .001 ಆದಾಗ $|x^2-100|$ ರ ಬೆಲೆ 0.020001 ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $x-10$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಷ್ಟೂ x^2-100 ಮತ್ತಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದಾದರೆ, x ಮತ್ತು 10 ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಡಿಮೆ ಆದ ಹಾಗೆಲ್ಲಾ x^2 ಮತ್ತು 100 ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೇಳಲು ε ಮತ್ತು δ ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

$|x-10| \neq 0$ ಆಗಿ $|x-10| < \delta$ ಆದಾಗ $|x^2-100| < \varepsilon$ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಥವಾ ε ಎಂಬ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

$0 < |x-10| < \delta$ ಆದಾಗೆಲ್ಲಾ

$|x^2 - 100| < \varepsilon$ ಆಗುವಂತೆ

δ ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಬೆಲೆಯ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$|x^2-100| = 2.01$ ಆಗಬೇಗಾದರೆ $|x-10| = 0.1$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\varepsilon = 2.01$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ $\delta = 0.1$ ಎಂದು ಆರಿಸಿದರೆ

$0 < |x-10| < 0.1$ ಆದಾಗ $|x^2-100| < 2.01$ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಅಲ್ಲದೆ $\varepsilon = .020001$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ, $\delta = .001$ ಎಂದು ಆರಿಸಿದರೆ

$0 < |x-10| < .001$ ಆದಾಗ $|x^2-100| < .020001$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ರೀತಿ ε ನ್ನು ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಾಗ, δ ಎಂಬ ಸೂಕ್ತವಾದ ಸಣ್ಣ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ

$0 < |x-10| < \delta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ $|x^2-100| < \varepsilon$ ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ, δ ಸಂಖ್ಯೆಯು ε ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ x ಚರವು 10 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ x^2 ನ ಬೆಲೆಯು 100ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಅಥವಾ x^2ನ ಮಿತಿಯು 100 ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

$$\lim_{x \to 10} x^2 = 100$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ, ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

11.3 ಮಿತಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

$f(x)$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (a ಯ ಸುತ್ತಲೂ) ಯಾವುದಾದರೂ ಮುಕ್ತ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಉತ್ಪನ್ನವು a ಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಯಾವುದಾದರೂ ε ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, $|x-a| < \delta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ಆಗುವಂತೆ δ ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ, x ಚರವು aಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ $f(x)$ ನ ಮಿತಿಯು L ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ: $x = a$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\lim_{x\to 2} (5x-4) = 6$; $\varepsilon = 0.002$ ಆದರೆ δ ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

$\lim_{x\to 2} [f(x)] = 6$ ಅಂದರೆ, $\varepsilon > 0$ ಎಂಬ ಯಾವುದೆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ

$0 < |x-2| < \delta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ $|f(x) - 6| < \varepsilon$ ಆಗುವುದು.

ಈಗ, $|f(x) - 6| = |5x-4-6|$

$= |5x-10|$

$= 5\,|x-2|$

$\therefore 5\,|x-2| < 0.002$ ಆಗಲು $0 < |x-2| < \delta$ ಆಗಬೇಕು.

ಅಥವಾ $|x-2| < \dfrac{0.002}{5}$ ಆಗಲು $0 < |x-2| < \delta$ ಆಗಬೇಕು.

$|x-2| < 0.0004$ ಆಗಲು $0 < |x-2| < \delta$ ಆಗಬೇಕು.

ಈಗ, $\delta = 0.0004$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ

$0 < |x-2| < 0.0004$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ

$|(5x-4) - 6| < 0.002$ ಆಗುವುದು.

$\delta = 0.0004$ರ ಬದಲು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

2. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

ಈ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

$x = 0$ ಆದರೆ, $y = 3$ ಮತ್ತು $x=1$ ಆದರೆ $y = 4$ ಆಗುವುದು.

ಆದರೆ, $x = 3$ ಆದಾಗ, ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡೂ ಶೂನ್ಯವಾಗಿ $y = \dfrac{0}{0}$ ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದುವುದು. ಆಗ, y ನ ಬೆಲೆ ಅನಿಶ್ಚತ (ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$x = 3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಬದಲು 3 ರ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 3 ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$x = 2.90$ ಆದರೆ, $y = \dfrac{(2.9)^2 - 9}{2.9 - 3} = (2.9) + 3 = 5.9$

$x = 2.99$ ಆದರೆ, $y = \dfrac{(2.99)^2 - 9}{2.99 - 3} = (2.99) + 3 = 5.99$

ಇದೇ ರೀತಿ ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆಯಿಂದ x ನ ಬೆಲೆ 3 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ,

$x = 3.1$ ಆದರೆ, $y = \dfrac{(3.1)^2 - 9}{3.1 - 3}$

$= 3.1 + 3$

$= 6.1$

$x = 3.01$ ಆದರೆ $y = \dfrac{(3.01)^2 - 9}{3.01 - 3}$

$= \dfrac{(3.01) + 3}{1}$

$= 6.01$

$x = 3.001$ ಆದರೆ $y = \dfrac{(3.001)^2 - 9}{(3.001 - 3)} = 3.001 + 3$

$= 6.001$

ಇತ್ಯಾದಿ.

x ನ ಬೆಲೆಯು ಎರಡು ಕಡೆಯಿಂದ 3 ಅನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ನ ಬೆಲೆಯು 6 ಅನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ; y ಮತ್ತು 6 ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು, x ಅನ್ನು 3 ರ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮೀಪ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ, ಸಾಕಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಬಹುದು.

$\therefore \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ ಆಗುವುದು.

ಅಂಶ, ಛೇದಗಳೆರಡೂ ಸೊನ್ನೆ ಆದಾಗ್ಯೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಸಮಂಜಸವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಮಿತಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು, ಅಂಶ, ಛೇದಗಳಲ್ಲಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕುವುದರ ಮೂಲಕ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇಲ್ಲದೆಯೂ ಇರಬಹುದು.

3. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log \left[1+ \frac{h}{x}\right]$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log \left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \log \left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \log \left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}$$

$\frac{h}{x} = k$ ಇರಲಿ; $k\to 0$ ಆದಾಗ $h\to 0$ ಆಗುವುದು.

ಆಗ $\lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \log \left(1+ \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \frac{1}{x} \lim_{k\to 0} \log_e \ (1+k)^{1/K}$

$$= \frac{1}{x} \log_e e \quad \left[\text{ಏಕೆಂದರೆ, } \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\right]$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log \left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

4. $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{(8-x)} - \sqrt{(x-6)}}{(7-x)}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $x=7$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡೂ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವುದು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು $\frac{0}{0}$ ಎಂಬ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದುವುದು. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡನ್ನೂ $\sqrt{(8-x)} + \sqrt{(x-6)}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅಂಶವನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಿದಾಗ

$$\frac{(8-x) - (x-6)}{(7-x)\ \{\sqrt{(8-x)} + \sqrt{(x-6)}\}}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು

$$\frac{2(7-x)}{(7-x)\ \{\sqrt{(8-x)} + \sqrt{(x-6)}\}}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರ ಬೆಲೆ

$$\frac{2}{\{\sqrt{(8-x)} + \sqrt{(x-6)}\}}$$

ಈಗ, x ನ ಬೆಲೆ 7 ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, x ಚರವು 7 ಅನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು 1 ಅನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿ 1 ಎಂದಾಯಿತು. ಅಂದರೆ

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x-6}}{7-x} = 1$$

ಇಲ್ಲಿ $x = 7$ ಆದಾಗ ದತ್ತ ಬೀಜ ವಾಕ್ಯವು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ಅದು ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

5. $y = \frac{8x+5}{4x+3}$ ಆದರೆ

(i) $x \to 0$ ಆದಾಗ, (ii) $x \to \infty$ ಆದಾಗ

y ನ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x \to 0$ ಆದಾಗ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶವನ್ನು 5 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿಯೂ, ಛೇದವನ್ನು 3 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿಯೂ ಮಾಡಬಹುದು. ಅಂದರೆ x ಅನ್ನು ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ y ನ ಮಿತಿ 5/3 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\lim_{x \to 0} \frac{8x+5}{4x+3} = \frac{5}{3}$$

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಿತಿಯು ಉತ್ಪನ್ನದ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $x = 0$ ಆದಾಗ $y = \frac{5}{3}$ ಆಗುವುದು.

(ii) x ಅನ್ನು ಅಂಶ, ಛೇದಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ

$$y = \frac{x\left(8+\frac{5}{x}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}$$

$$\text{ಅಥವಾ } y = \frac{\left(8+\frac{5}{x}\right)}{\left(4+\frac{3}{x}\right)}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. x ಅನ್ನು ಸಾಕಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ $\frac{5}{x}, \frac{3}{x}$ ಗಳು ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಬೆಲೆ ಆಗುವುವು. ಅಂದರೆ $x \to \infty$ ಆದಾಗ

$$\frac{5}{x} \to 0, \quad \frac{3}{x} \to 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{5}{x}}{4+\frac{3}{x}} = \frac{8}{4} = 2$$

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ xಗೆ ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ್ಯೂ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು 2 ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಿತಿಯು ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ ಅಲ್ಲ.

11.4 ಮಿತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ ಮತ್ತು $\lim_{x\to a} g(x) = m$ ಆದರೆ

ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ :

(1) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = l + m = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

ಅಂದರೆ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿಯು ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮಿತಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.

(2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = l - m = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಮಿತಿಯು ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮಿತಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮ.

(3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \,.\, g(x)] = l \,.\, m = \lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮಿತಿಯು ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮಿತಿಗಳ ಗುಣ ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ.

(4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ ($m \neq 0$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ)

ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮಿತಿಯು ಆ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮಿತಿಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆದರೆ ಛೇದದ ಮಿತಿ 0 ಗೆ ಸಮವಿಲ್ಲದಾಗ ಮಾತ್ರ ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

(5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ [$l \neq 0$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ]

ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಮಿತಿಗಳು

ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಮಿತಿಗಳು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿವೆ:

(1) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ (θ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)

(2) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta} = 1$ (θ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)

(3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$

(ಇಲ್ಲಿ n ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಆಗಿರಬಹುದು)

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (e ಎನ್ನುವುದು ನೇಪೀರಿಯನ್ ಲಾಗರಿತಮ್‌ನ ಆಧಾರ)

(5) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

(6) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)}{x} = 1$

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log_e a$

11.5 ಎಡದಿಂದ ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬಲದಿಂದ ಮಿತಿ

(i) ಎಡದಿಂದ ಮಿತಿ:

$x<a$ ಆದಾಗ f ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. a ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು x ಚರವು aಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದ *ಎಡದಿಂದ ಮಿತಿ* (ಅಥವಾ ಎಡಮಿತಿ) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು:

$\varepsilon>0$ ಎಂಬ ಎಷ್ಟೇ ಸಣ್ಣದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

$0 < |a-x| < \delta$ ಆದಾಗಲ್ಲಾ

$|f(x) - L|<\varepsilon$ ಆಗುವಂತೆ

δ ಎಂಬ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುವುದಾದರೆ L ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಎಡಮಿತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = L$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸೂಚನೆ:

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಎಡಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ, x ಅನ್ನು $a-h$ ಗೆ ಬದಲಿಸಿ ($h > 0$) h ಅನ್ನು 0 ಗೆ ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a-h),\ h > 0$$

(ii) ಬಲದಿಂದ ಮಿತಿ

f ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು $x > a$ ಆದಾಗ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. aಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದ ಬಲಮಿತಿ (ಅಥವಾ *ಬಲದಿಂದ ಮಿತಿ*) ಎನ್ನಬಹುದು. ಅದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು:

ಎಷ್ಟೇ ಸಣ್ಣದಾದರೂ $\varepsilon > 0$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ,

$0 < |x - a| < \delta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ

$|f(x) - L| < \varepsilon$ ಆಗುವಂತೆ

δ ಎಂಬ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಣ್ಣ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರುವುದಾದರೆ L ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬಲಮಿತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = L$$

ಸೂಚನೆ:

ಬಲಮಿತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, x ಗೆ $a+h$ ಅನ್ನು ($h>0$) ಆದೇಶಿಸಿ, h ಅನ್ನು 0 ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುವಂತೆಮಾಡಿ, ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h),\ h > 0$$

ಮಿತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯ

x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ $f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಇರಬೇಕಾದರೆ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಎಡಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬಲಮಿತಿಗಳೆರಡೂ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದು, ಎರಡೂ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಾದರೆ

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ಉದಾಹರಣೆ 1: f ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನವು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ :

$f(x) = x^2,\ x < 2$ ಆದಾಗ

$f(x) = 10-3x,\ x > 2$ ಆದಾಗ

ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಮೂರು ಮಿತಿಗಳನ್ನು (ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $\lim_{x \to 2-} f(x)$

(ii) $\lim_{x \to 2+} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to 2} f(x)$

(i) $\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{h \to 0} (2+h)^2, h > 0$

$$= \lim_{h \to 0} (4+2h + h^2) = 4$$

(ii) $\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{h \to 0} [(10-3(h+2)], h > 0$

$$= \lim_{h \to 0} (10-6-3h) = 4$$

(iii) ಉತ್ಪನ್ನದ ಎಡಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬಲಮಿತಿ ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅಂದರೆ

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

ಇಲ್ಲಿ $x=2$ ಆದಾಗ $f(x)$ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2:

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ ಆದರೆ

(i) $\lim_{x \to 0+} f(x)$

(ii) $\lim_{x \to 0-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ)

ಈ ಮೇಲಿನ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{|0+h|}{0+h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \quad (h > 0)$

(ii) $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{|(0-h)|}{0-h} \quad (h > 0)$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = -1$

(iii) f ನ ಎಡಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬಲಮಿತಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ

$\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$. ಆದ್ದರಿಂದ

$\lim_{x\to 0} f(x)$ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

11.6 ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ

ಮಿತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವಿಶೇಷ ಗುಣಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:

$y = f(x)$ ಎನ್ನುವುದು x ಎಂಬ ನೈಜ ಚರದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. $f(x)$ ಎನ್ನುವುದು $x = a$ ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ತೆರೆದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಷರತ್ತುಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಪೂರೈಕೆಯಾದಾಗ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು a ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ

(i) x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

(ii) $x = a$ ನಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, $f(a)$ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕು ಮತ್ತು

(iii) x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ, ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯು $x = a$ ನಲ್ಲಿನ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ಆಗಿರಬೇಕು. ಈ ಮೇಲಿನ ಷರತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಷರತ್ತು ಪೂರೈಕೆ ಆಗದಿದ್ದರೂ ಆ ಉತ್ಪನ್ನವು a ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ *ವಿಚ್ಛಿನ್ನ* ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಮಿತಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ($x = a$ ನಲ್ಲಿ) ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು:

ಎಷ್ಟೇ ಸಣ್ಣದಾದ $\varepsilon > 0$ ಕೊಟ್ಟಾಗಲೂ

$0 < |x-a| < \delta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ಆಗುವಂತೆ

$\delta>0$ ಎಂಬ ಸಣ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಅಂದರೆ

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ಸೂಚನೆ: x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$\lim_{x \to a-} f(x) \text{ ಮತ್ತು } \lim_{x \to a+} f(x)$$

ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಈ ಎರಡು ಮಿತಿಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಅಂದರೆ x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ ಉತ್ಪನ್ನದ ಎಡಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬಲಮಿತಿಗಳು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ).

ಒಂದು ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ $[a,b]$ ಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ :

$f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ (ಕ್ಲೋಸ್ಡ್ ಇಂಟರ್‌ವಲ್) $[a,b]$ ಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದ್ದು, ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಅಂತರದ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರಬೇಕು.

ಸೂಚನೆ: ಈ ರೀತಿ ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ [a,b] ಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತವಾದ ಉತ್ಪನ್ನವು $x < a$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು $x > b$ ಆದಾಗ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ

$$\lim_{x \to a-} f(x) \text{ ಮತ್ತು } \lim_{x \to b+} f(x)$$

ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ [a,b] ಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, $x=a$ ನಲ್ಲಿ a ಯ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ, $x = b$ ನಲ್ಲಿ b ಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಅಂತರದ ಇತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೂ ಉತ್ಪನ್ನವವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{x}$, $x \neq 0$ ಆದಾಗ

ಮತ್ತು $f(x) = 1$, $x = 0$ ಆದಾಗ.

$f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=0$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

$= \lim_{x \to 0} (5) \dfrac{\sin 5x}{5x} = (5)(1) = 5$

ಈಗ, 11.6 ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ಮೊದಲನೆಯ ಷರತ್ತು ಪೂರೈಕೆ ಆಗಿದೆ.

(ii) $f(0) = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಷರತ್ತು ಪೂರೈಕೆ ಆಗಿದೆ.

(iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = 5 \neq f(0) = 1$

ಅಂದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಷರತ್ತು ಪೂರೈಕೆ ಆಗಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 0$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿಲ್ಲ.

2. $f(x) = 5+x$, $x \leq 1$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು

$f(x) = 5-x$, $x > 1$ ಆದಾಗ

$f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1} (5+x) = 6$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1} (5-x) = 4$$

$\therefore$ ಎಡಮಿತಿ $\neq$ ಬಲಮಿತಿ.

ಅಂದರೆ 1 ನೆಯ ಷರತ್ತು ಪೂರೈಕೆ ಆಗಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 1$ರಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿಲ್ಲ.

3. $f(x) = \sin x$ ಉತ್ಪನ್ನವು xನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$x = a$ ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದೆ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇರಲಿ.

$\therefore\ f(a) = \sin a$

$\varepsilon > 0$ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಲಿ.

ಈಗ, $|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a|$

$$= 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\ \sin\frac{x-a}{2}\right|$$

$$= 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

$$< 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \text{ ಏಕೆಂದರೆ } \left|\cos\frac{x+a}{2}\right|$$

$$\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \text{ ಏಕೆಂದರೆ } |\sin\theta| \leq \theta$$

ಅಂದರೆ $|f(x) - f(a)| \leq |x-a|$

ಈಗ, $\varepsilon = \delta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $0 < |x-a| < \delta = \varepsilon$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ಆಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $x = a$ ನಲ್ಲಿ $\sin x$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

4. f ಉತ್ಪನ್ನವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ:

$$f(x) = x^2+3, \; x > 1 \text{ ಆದಾಗ}$$

$$f(x) = 3x + 1, \; x = 1 \text{ ಆದಾಗ}$$

$$f(x) = 4, \; x < 1 \text{ ಆದಾಗ}$$

$x = 1$ ನಲ್ಲಿ f ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

$$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} (x^2+3) = \lim_{h\to0} (1+h)^2 + 3 = 4$$

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} (4) = \lim_{h\to0} 4 = 4$$

ಮತ್ತು $f(1) = 3.1 + 1 = 4$

$$\therefore \lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1} f(x) = f(1)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 1$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

5. $f(x) = x^2$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 2$ ರಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\lim_{x\to2+} f(x) = \lim_{x\to2-} f(x) = f(2) = 4$

ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

6. $y = x \sin \frac{1}{x}$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯನ್ನು $x \to 0$ ಆದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಈಗ, $\varepsilon > 0$ ಕೊಟ್ಟಾಗ $|x-0| < \delta$ ಆದಾಗ $|f(x) - 0| < \varepsilon$ ಆಗುವಂತೆ δ (ಧನಸಂಖ್ಯೆ) ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right|$$

ಈಗ, $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x|$$

$$\therefore \left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x| < \varepsilon \Longrightarrow |x-0| < \varepsilon$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\delta = \varepsilon$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಖ್ಯೆ δ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದಾಯಿತು.

$$\therefore \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

ಮೂಲಬಿಂದು *(origin)*ವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ $y = x \sin \frac{1}{x}$ ನ ನಕ್ಷೆಯು $y = x$ ಮತ್ತು $y = -x$ ಗಳ ನಡುವೆ ತೂಗಾಡುತ್ತದೆ *(oscillates).*

7. $y = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು

$y = 0$, $x = 0$ ಆದಾಗ

ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ ಎಂದುತೋರಿಸಿದೆ.

$x = 0$ ಆದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ $y = 0$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ಎಡಮಿತಿ = ಉತ್ಪನ್ನದ ಬಲಮಿತಿ $= 0$ ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

8. $f(x) = c$, $x \in R$, ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ಇಲ್ಲಿ R = ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ).

$a \in R$ ಮತ್ತು $h \in R$ ಇರಲಿ.

$h > 0$ ಆದಾಗ $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = c$

ಮತ್ತು $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a-h) = c$

ಅಲ್ಲದೆ $a \in R$ ಆದಾಗ $f(a) = c$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = c$

ಅಂದರೆ, $f(x) = c$ ಉತ್ಪನ್ನವು R ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

9. f ಎನ್ನುವುದು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪವಾಗಿದೆ :

$f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$, $x \neq a$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು

$f(x) = 3a$, $x = a$ ಆದಾಗ.

$x=a$ ನಲ್ಲಿ $f(x)$ನ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಈಗ, $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$ $(x \neq a)$ ಮತ್ತು $f(a) = 3a$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿಲ್ಲ.

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $f(x) = 2a$ ಆದರೆ, $x=a$ ನಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

10. $f(x) = x$, $x \in R$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು R ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ?

a ಎನ್ನುವುದು R ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಲಿ. h ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಇರಲಿ.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} (a+h) = a$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a-h) = \lim_{h\to 0} (a-h) = a$$

ಅಲ್ಲದೆ $f(a) = a$

$$\therefore \lim_{x\to a+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

ಇದು R ನ ಎಲ್ಲಾ $a \in R$ ಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, R ನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

11.7 ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ

ಪ್ರಮೇಯ : f ಮತ್ತು g ಎಂಬ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು $x=a$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ

(i) $f+g$ ಉತ್ಪನ್ನವು a ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ

(ii) $f-g$ ಉತ್ಪನ್ನವು a ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ

(iii) $f.g$ ಉತ್ಪನ್ನವು a ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ

(iv) $\frac{f}{g}$ ಉತ್ಪನ್ನವು, $g(a) \neq 0$ ಆದರೆ, a ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

(ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕೈ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ).

ಬಹುಘಾತಪದೀಯ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} .... + a_n$$

ಈ ಬಹುಘಾತ ಪದಿಯು x ನ ಎಲ್ಲಾ ನೈಜ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವುದು.

ಈಗ, $x=a$ ಯಾವುದೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n, \quad \lim_{x\to a} a_0 x^n = a_0 a^n$$

ಇತ್ಯಾದಿ n ನ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-2} + ... + a_n = f(a)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಘಾತಪದಿಯು (ಪಾಲಿನಾಮಿಯಲ್) ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನವು $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $P(x)$, $Q(x)$ಗಳು ಇದರಲ್ಲಿ ಬಹುಘಾತಪದಿಗಳು. ಇಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನವು $Q(x)= 0$ ಆಗುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ಉಳಿದ x ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸುಲಭ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ :

(i) x^n ಉತ್ಪನ್ನವು n ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

(ii) x^n ಉತ್ಪನ್ನವು n ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ $x = 0$ ಬೆಲೆಯನ್ನುಳಿದು ಇತರ ಬೆಲೆಗೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

(iii) $\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ ಗಳು x ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿವೆ.

(iv) $\pm \frac{1}{2}\pi,\ \pm \frac{3}{2}\pi, \pm 5\frac{\pi}{2}$ ಇತ್ಯಾದಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನುಳಿದು x ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $\tan x$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಬಲದಿಂದ $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ $\tan x \rightarrow -\infty$ ಮತ್ತು ಎಡದಿಂದ $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ $\tan x \rightarrow +\infty$

$\therefore \lim_{x \to \pi/2} \tan x$ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

(v) ಇದೇ ರೀತಿ $\cot x$ ಉತ್ಪನ್ನವು $0 < x < \pi$ ಆದಾಗ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

(vi) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ಅಂದರೆ $|x| < \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ $\sec x$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

(vii) $0 < x < \pi$ ಆದಾಗ $\operatorname{cosec} x$ ಅನಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಇನ್ನೂ ಸ್ಫುಟವಾಗಿ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.1

I ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^4(x^4+2)^2$

(ii) $\dfrac{3x^2+2x-5}{(x-1)\,(x+3)}$

(iii) $2+x-x^2$

(iv) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(v) $\sin^2 x$

II .ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಆಗಿಲ್ಲದೆ ಇರುವ xನ ಬೆಲೆ ಯಾವುದು?

(i) $\dfrac{x^2}{3x-2}$ (ii) $\dfrac{x}{(x+1)^3}$ (iii) $\cot x$

(iv) $\dfrac{1}{x^2-17\,x^2+16}$ (v) $\tan\ 3x$

III $x = 0$ ನಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿವೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \text{ ಆದಾಗ} \\ 1, & x = 0 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}. & x \neq 0 \text{ ಆದಾಗ} \\ 1, & x = 0 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$

(iii) $f(x) = \dfrac{x-|x|}{x}$

IV ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} - a, & x < a \text{ ಆದಾಗ} \\ 0, & x = a \text{ ಆದಾಗ} \\ a - \frac{a^2}{x}, & x > a \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$

$x = a$ ಯಲ್ಲಿ

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{2x^2-5x-3}, & x \neq -\frac{1}{2} \text{ ಆದಾಗ} \\ -\frac{2}{7}, & x = \frac{-1}{2} \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$

$x = -\frac{1}{2}$ ನಲ್ಲಿ

(iii) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $x \neq 3$ ಆದಾಗ

$f(x) = 6$, $x = 3$ ಆದಾಗ

$x = 3$ ಯಲ್ಲಿ

(iv) $f(x) = 1+x+|x|$, $x = -1, 0, 1$ ರಲ್ಲಿ

(v) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$, $x = 2$ ರಲ್ಲಿ

V ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ತಮ್ಮ ಪ್ರಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$

(iii) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (0,1)$

VI $x = \frac{1}{2}$ ನಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < ½ \text{ ಆದಾಗ} \\ 1, & x = ½ \text{ ಆದಾಗ} \\ 1-x, & ½ < x < 1 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$$

VII $[x]$ ಎಂದರೆ x ನ್ನು ಮೀರದ ಗರಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆದರೆ

(i) $f(x) = [x]$ ಮತ್ತು

(ii) $f(x) = x - [x]$

x ನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

VIII $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$ ($x \neq 0$ ಆದಾಗ) ಮತ್ತು $f(0) = 0$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 0$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

IX $\cos x$ ಉತ್ಪನ್ನವು x ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11.8 ನಿಷ್ಪನ್ನ

ಎರಡು ಚರಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿದ್ದಾಗ, ಒಂದು ಚರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂದಿಸಿದಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಚರವು ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವ ದರವನ್ನು (ಅದು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೇ ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಸಮಸ್ಯೆ ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳು :

$y = f(x)$ ಎಂದಿರಲಿ.

x ನ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳು, y ನ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ರೀತಿ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು ಮುಖ್ಯ. ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಒಂದು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ಲೋಹದ ಚೌಕಾಕಾರದ ತಟ್ಟೆಯನ್ನು ಕಾಯಿಸಿದಾಗ, ಆ ತಟ್ಟೆಯ ಬಾಹುಗಳು ಗೊತ್ತಾದಷ್ಟು ಪರಿಮಾಣ ವಿಕಾಸ ಹೊಂದಿದಾಗ, ಆ ತಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತಟ್ಟೆಯ ಬಾಹು x ಇರಲಿ. h ಎನ್ನುವುದು ರೇಖೀಯ ವಿಕಸನ (ವ್ಯಾಕೋಚನ) ಇರಲಿ; ಮತ್ತು ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ತಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ y ಇರಲಿ. ವಿಕಸನದ ನಂತರ ತಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು. ಇದು y^1 ಇರಲಿ.

$$y^1 = (x+h)^2$$

$$(y^1 - y) = (x+h)^2 - x^2$$

$$= 2xh + h^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಆದ ಹೆಚ್ಚುವರಿ $= 2xh + h^2$

x ನಲ್ಲಿ ಆದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು Δx (ಅಥವಾ δx) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ Δyನಲ್ಲಿ ಆದ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು Δy ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

$$\Delta y = 2x \ \Delta x + (\Delta x)^2 \quad ....(1)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಮ್ಮ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಒದಗಿಸಿದೆ. ಅಂದರೆ x ಬಾಹುವಿರುವ ಲೋಹದ ತಟ್ಟೆಯು ಶಾಖದಿಂದ Δx ನಷ್ಟು ರೇಖೀಯ ವಿಕಾಸ ಹೊಂದಿದಾಗ ತಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ y ನಲ್ಲಿ ಆದ ಹೆಚ್ಚಳ (ವೃದ್ಧಿ) Δy ಆಗಿರುವುದು.

ಈ ಸೂತ್ರವು $y = x^2$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ x ಚರದ ಹೆಚ್ಚಳ. Δx ಆದಾಗ x^2 (ಅಥವಾ y) ನಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $x = 9$, $\Delta x = 2$ ಆದಾಗ

$$\Delta y \doteq 2.9.2 + 2^2$$
$$= 36+4$$
$$= 40$$

ತಾಳೆನೋಡುವುದು: $x = 9$ ಆದಾಗ $x^2 = 81$

$x = 11$ ಆದಾಗ $x^2 = 121$

$\therefore$ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $= 40$

ಅಂದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ 9 ರಿಂದ 11 ಆದಾಗ, x^2 ನಲ್ಲಿ ಆದ ಹೆಚ್ಚುವರಿ 40

$y = x^2$ ಆದಾಗ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ಪ್ರಮಾಣ :

ಲೋಹದ ತಟ್ಟೆಯನ್ನು $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ ಎಂದು (1) ರಿಂದ ತಿಳಿದಿದೆ. ತಟ್ಟೆಯನ್ನು 10°C ನಿಂದ ಮೊದಲಿನ 0°C ಗೆ ತಂಪುಮಾಡಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಈಗ ರೇಖಾ ವಿಕಸನವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆಲ್ಲಾ Δx ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳ 10°C ಇದ್ದಾಗ Δx ಬೆಲೆ 0.00123
ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳ 1 °C ಇದ್ದಾಗ Δx ಬೆಲೆ 0.000123
ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುವರಿ $\frac{1}{1000}$ °C ಇದ್ದಾಗ Δx ನ ಬೆಲೆ.000 000123

ಇತ್ಯಾದಿ

ಆದರೆ ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪವಾದರೂ ಹೆಚ್ಚಳ ಇರಲೇಬೇಕು, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯೇ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ Δx ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ Δx ನ್ನು ನಮಗೆಷ್ಟು ಬೇಕೋ ಅಷ್ಟು ಸಣ್ಣ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು; ಆದರೆ $\Delta x = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. $\Delta x \neq 0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸ ಬಹುದು.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \qquad ....(2)$$

Δx ನ್ನು ಅತಿ ಸಣ್ಣದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $2x + \Delta x$ ನ್ನು $2x$ ಗೆ ಸಮೀಪವಾಗುವ ಹಾಗೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x) = 2x$$

ಅಂದರೆ, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು, x ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ, $2x$ ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು.

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $\frac{dy}{dx}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $\frac{d}{dx}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸಂಕೇತವಲ್ಲ. ಅದು ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಕೇತ. ಈ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಮಾಡುವುದರಿಂದ $\Delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ನ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ಮತ್ತು $y = x^2$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx} = 2x$ ಆಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $y = x^3$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು :

ಇದನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯಂತೆ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಲೋಹದ ತಟ್ಟೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಹಾಗೆ ಲೋಹದ ಘನವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. x ಎನ್ನುವುದು ಅದರ ಭುಜ, y ಎನ್ನುವುದು ಅದರ ಗಾತ್ರ. ಘನವನ್ನು ಕಾಯಿಸಿದಾಗ ಭುಜದ ರೇಖಾ ವಿಕಾಸ Δx ಮತ್ತು ಈ ಘನದ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ ಎಷ್ಟು ? (ಇದು Δy ಆಗುವುದು).

ವಿಕಾಸ ಹೊಂದಿದ ಘನದ ಗಾತ್ರ y^1 ಆದರೆ

$$y^1 = (x+\Delta x)^3$$

$$\therefore y^1 - y = (x+\Delta x)^3 - x^3$$

ಅಥವಾ $\Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಘನದ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದ ವಿಕಾಸವನ್ನು ರೇಖಾ ವಿಕಾಸದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \doteq 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

ಅಂದರೆ, $y = x^3$ ಆದಾಗ $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಈ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಚರದ ಬದಲಾವಣೆ ಆದಾಗ ಅದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಚರದಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿದಂತಾಯಿತು.

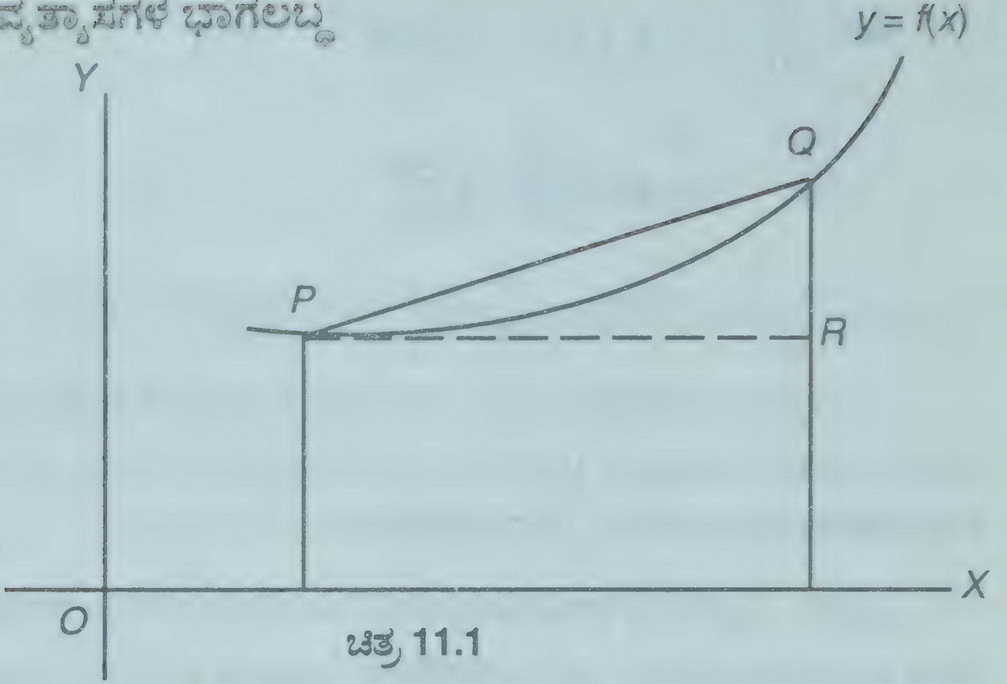
ವಿಜ್ಞಾನ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದವುಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಚರಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾದಂತಹ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಇಂತಹ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ :

ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮೊದಲಿಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಕೀರ್ತಿ ಸರ್ ಐಸಾಕ್ ನ್ಯೂಟನ್ (1642–1727) ಎಂಬ ಆಂಗ್ಲ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮತ್ತು ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿಗೂ, ಗಾಟ್‌ಫ್ರೇಡ್ ವಿಲ್‌ಹೆಲ್ಮ್ ಲೈಬ್ನಿಜ್ (1646–1716) ಎಂಬ ಜರ್ಮನ್ ದೇಶದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮತ್ತು ತತ್ವಜ್ಞಾನಿಗೂ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

ಭಾರತೀಯರಾದ ನಮಗೆ ನಿಜಕ್ಕೂ ಹೆಮ್ಮೆಯ ವಿಷಯವೆಂದರೆ ನ್ಯೂಟನ್ ಲೈಬ್ನಿಜ್‌ರಿಗಿಂತ ಐನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ (ಎರಡನೇ) ಭಾಸ್ಕರನು (1114) ಆತನ *ಸಿದ್ಧಾಂತ ಶಿರೋಮಣಿ* ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ "ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ಗತಿ" ಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಅಂತೆಯೇ, ಮಂಜುಳಾಚಾರ್ಯ (ಅಥವಾ ಮುಂಜಲಾಚಾರ್ಯ ಕ್ರಿ.ಶ. 932) ಹಾಗೂ 15ನೇ ಶತಮಾನದ ಕೇರಳದ ಗಣಿತಜ್ಞರೂ ಇಂತಹ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಖಗೋಲಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ.

11.8.1 ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ



ಚಿತ್ರ 11.1

$y = f(x)$ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಿರಲಿ.

P ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $[x, f(x)]$ ಆಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 11.1).

x ನಲ್ಲಿ ಆದ ಹೆಚ್ಚಳವನ್ನು Δx ಎಂದು ಕರೆದರೆ y ನಲ್ಲಿ ಆದ ಅನುಕ್ರಮ ಬದಲಾವಣೆಯು $f(x+\Delta x) - f(x)$ ಆಗುವುದು. ಜಾಮಿತಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $y = f(x)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದಲೂ, ಹೆಚ್ಚಳವನ್ನು ತೋರಿಸಲು P, Q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದಲೂ ತೋರಿಸಿದೆ. Q ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $[x+\Delta x, f(x+\Delta x)]$ ಆಗುತ್ತವೆ. $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 11.1 ರಲ್ಲಿ PQ ಜ್ಯಾದ ಓಟವು (slope) $\frac{QR}{PR}$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. Q ಬಿಂದುವು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ PQ ಜ್ಯಾವು P ನಲ್ಲಿ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $\Delta x \to 0$ ಆದ ಹಾಗೆಲ್ಲಾ PQ ನ ಓಟವು P ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಈ ಮಿತಿಯನ್ನೇ x ನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಅಥವಾ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎನ್ನುವರು. $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

11.8.2 $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಅವಕಲ್ಯ (ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಬಲ್) ಆಗಬೇಗಾದರೆ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

ಮಿತಿಯು ಲಭ್ಯವಿರಬೇಕು (ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕು). ಈ ಮಿತಿಯ ಬೆಲೆಗೆ $f(x)$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಅಥವಾ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ (ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕ) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕೇತಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} \text{ ಅಥವಾ } f^1(x), \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d(y)}{dx} \; dy, \; y_1, \; y^1, \; Dy$$

ಈ ರೀತಿ, $f(x)$ ನ ಉತ್ಪನ್ನದ ಒಂದು ಬಿಂದು x ನಲ್ಲಿ ಆದ ಕ್ಷಣೀಯ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವೇ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಅಥವಾ *ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ* ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

11.8.3 ಅವಕಲ್ಯತೆ – ಬಲ ಮತ್ತು ಎಡ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$x=a$ ನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ *ಬಲ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ* (ನಿಷ್ಪನ್ನ) ವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು :

$$R\,f'(a) = \lim_{h \to 0+} \left[\frac{[f(a+h)-f(a)]}{h}\right]$$

ಆದರೆ ಈ ಮಿತಿ ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. h ಎನ್ನುವುದು 0 ಯನ್ನು ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಧನ ಬೆಲೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹಾಗೆಯೇ, $f(x)$ ನ ಎಡ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ:

$$L\,f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(a+h - f(a)]}{h}$$

ಈ ಮಿತಿಯು ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ. h ಎನ್ನುವುದು ಋಣ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ f ಎನ್ನುವುದು a ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯ (ಅವಕಲ್ಯ) ವಾಗಲು $R\,f'(a) = L\,f'(a)$ ಆಗಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 1:

$y = |x|$, $x = 0$ ಆದಾಗ ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{|+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$Lf(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{|0-h| - |0|}{h} = -1$$

ಅಂದರೆ, $R f'(0) \neq Lf'(0)$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 2:

$f(x) = x^{1/3}$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 1$ ನಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

$$Rf'(1/3) = \lim_{h\to 0+} \frac{[(1+h)^{1/3} - 1]}{h^{1/3}} = 1$$

$$Lf'(1/3) = \lim_{h\to 0-} \frac{[(1+h)^{1/3} - 1]}{h} = 1$$

$$\therefore Rf'\left(\frac{1}{3}\right) = Lf'\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯವಾಗಿದೆ.

11.8.4 ನಿಷ್ಪನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಗಳ ಸಂಬಂಧ

ಒಂದು ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಮನಗಾಣಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ: ***f* ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು *c* ಯಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಯೋಗ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ *f* ಉತ್ಪನ್ನವು *c* ಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವುದು.**

ಸಾಧನೆ: *f* ಎಂಬುದು *c* ಯಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಯೋಗ್ಯವಾಗಿದ್ದು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $f(c+h) - f(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \times h \; (h \neq 0)$

$$\therefore \lim_{h \to 0} [f(c+h) - f(c)] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{[f(c+h) - f(c)}{h}\right] \times h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \times \lim_{h \to 0} h$$

$$= f'(c) \times 0$$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} f(c+h) = f(c)$$

ಅಥವಾ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

ಆದ್ದರಿಂದ, f ಎನ್ನುವುದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಈ ರೀತಿ f ಉತ್ಪನ್ನವು c ಯಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ c ಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಅಂಶ ತಿಳಿದಂತಾಯಿತು.

ಸೂಚನೆ:

(1) ಒಂದು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

(2) ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯವು ಸತ್ಯವಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು x ನ ಯಾವುದಾದರೂ ಬೆಲೆಗೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರಬಹುದು ಆದರೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯವಾಗದೆಯೂ ಇರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $f(x) = |x|$, $x=0$ ನಲ್ಲಿ.

11.8.5 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

ನಿಷ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು "ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. x ನಲ್ಲಿಯ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು δx ಅಥವಾ Δx ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3:

$\frac{1}{8x+5}$ ನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು $f'(x)$ ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = \frac{1}{8x+5} \qquad \text{.... (1)}$$

$$\therefore \; y+\Delta y = \frac{1}{8(x+\Delta x)+5} \qquad \text{.... (2)}$$

ಈಗ (2) ರಲ್ಲಿ (1) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ

$$\Delta y = \frac{1}{8(x+\Delta x)+5} - \frac{1}{8x+5}$$

ಅಥವಾ $\Delta y = \frac{8x+5-(8x+8\Delta x+5)}{[8(x+\Delta x)+5]\,[8x+5]}$

ಅಥವಾ $\Delta y = \frac{-8\Delta x}{(8x+8\Delta x+5)\,(8x+5)}$

ಇದನ್ನು Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8x}{(8x+8\Delta x+5)(8x+5)}$$

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ $\Delta x \to 0$ ಆಗುವಂತೆ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{-8}{(8x+5)\;(8x+5)} = \frac{-8}{(8x+5)^2}$$

$$\therefore \; \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{8x+5}\right] = \frac{-8}{(8x+5)^2}$$

ಉದಾಹರಣೆ 4:

ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = x^{-3/5} \quad .... (1)$$

ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ y+\Delta y = (x+\Delta x)^{-3/5} \quad .... (2)$$

(2) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ (1) ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$\Delta y = (x+\Delta x)^{-3/5} - x^{-3/5}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{-3/5} - (x)^{-3/5}}{\Delta x}$$

$$\therefore\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^{-3/5} - x^{-3/5}]}{(x+\Delta x) - x}$$

ಈಗ, $x+\Delta x = z$ ಆಗಿರಲಿ. $\Delta x \to 0$ ಆದಾಗ, $z \to x$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \lim_{z \to x} \frac{z^{-3/5} - x^{-3/5}}{z - x}$$

$$= -\frac{3}{5}\ x^{\frac{-3}{5} - 1} = -\frac{3}{5} x^{-8/5}$$

ಅಂದರೆ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right) = \frac{3}{5}\ x^{-8/5}$

ಉದಾಹರಣೆ 5:

x^n ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು (x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ) ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (n ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ).

$$y = x^n$$

$$\therefore\ y+\Delta y = (x+\Delta x)^n$$

$\therefore \Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$

ಈಗ, Δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\right]$$

ಅಂದರೆ, $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x}\right]$

ಈಗ, $x + \Delta x = z$ ಆಗಿರಲಿ. $\Delta x \to 0$ ಆದರೆ $z \to x$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{z \to x} \left[\frac{z^n - x^n}{z - x}\right] = n \,.\, x^{n-1}$$

ಏಕೆಂದರೆ $\lim_{x \to a} \left[\left(\frac{x^n - a^n}{x - a}\right) = n\, a^{n-1}\right]$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಮೇಲಿನ ಮೂಲಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

(i) $\frac{d}{dx}(x) = 1.x^{1-1} = x^0 = 1$

(ii) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3.x^{3-1} = 3x^2$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -1.x^{-1-1} = -1.x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-3}) = -3.x^{-3-1} = \frac{-3}{x^4}$

(v) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{½}) = ½\ x^{½-1} = ½\ x^{-½} = \frac{1}{2x^{½}}$

(vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-½}) = -½\ x^{-½-1} = -½\ x^{-3/2}$

11.8.6 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

u ಮತ್ತು v ಗಳು xನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ.

$y = u+v$ ಎಂದಿರಲಿ.

xನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುವರಿ δx ಆದರೆ, u ಮತ್ತು vಗಳಲ್ಲಿ δu ಮತ್ತು δvಆಗುವುದು.

$\therefore\ y+\delta y = (u+\delta u) + (v+\delta v)$

ಅಥವಾ $\delta y = \delta u + \delta v$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore\ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

ಈಗ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\text{i.e., } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

ಇದೇ ರೀತಿ

$$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿದರೆ

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm ---) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm ---$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : $y=x^3+x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 3x^2+2x$$

11.8.7 ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

u ಎನ್ನುವುದು x ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಮತ್ತು k ಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$$y = ku$$

$$\therefore y+\delta y = k(u+\delta u)$$

x ನಲ್ಲಿ δx ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಆದಾಗ u ನಲ್ಲಿ δu ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \delta y = k\,.\,\delta u$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = k\,.\frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} k \frac{\delta u}{\delta x}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = k.\frac{du}{dx}$

$$\textbf{i.e.} \quad \frac{d}{dx}(ku) = k.\frac{du}{dx}$$

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿದರೆ

$$\frac{d}{dx}[ku \pm lv \pm mw \pm ---] = k\frac{du}{dx} \pm l\frac{dv}{dx} \pm m\frac{dw}{dx} \pm ----$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $k,l,m...$ ಗಳು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $u,v,w...$ ಗಳು x ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ : $y=3x^2+5x^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3.\frac{d}{dx}(x^2)+5.\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 3.2x + 5.3x^2$$

$$= 6x + 15x^2$$

11.8.8 ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = c$ ಆಗಿರಲಿ (c ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ)

$\therefore\ y+\delta y = c$

$\therefore\ \delta y = 0$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 0 \qquad (\delta x \neq 0)$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಶೂನ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆ:

$y = 3x+5$

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಆಗಿರಲಿ. ಇದರಲ್ಲಿ 5 ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ.

$y+\delta y = 3(x+\delta x) + 5$

$\therefore\ \delta y = 3.\delta x + 0$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = 3$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3$$

ಸೂಚನೆ: ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊತ್ತದ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಅದರ ನಿಷ್ಪನ್ನ 0. ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಗುಣಕವಾದಾಗ ಆ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಆ ಗುಣಕವು ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಗುಣಕವಾಗುವುದು.

11.8.9 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

u ಮತ್ತು v ಗಳು x ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಯೋಗ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ.

$y = uv$

xನಲ್ಲಿ δx ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಆದರೆ uನಲ್ಲಿ δu ಹೆಚ್ಚುವರಿಯೂ, vನಲ್ಲಿ δv ಹೆಚ್ಚುವರಿಯೂ ಆಗುವುದು.

$$\therefore y+\delta y=(u+\delta u)(v+\delta v)$$

$$\therefore \delta y=(u+\delta u)(v+\delta v)-uv$$

$$= u.\delta v + v.\delta u + \delta u.\delta v$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = u.\frac{\delta v}{\delta x} + v.\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}.\delta v$$

ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = u\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right) + v.\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)$$

$$+\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)\lim_{\delta x\to 0}\delta v$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx} + 0$$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dx}(u.v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

ಈ ಮೇಲಿನ *ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರ*ವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$\frac{d}{dx}$ (1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ × 2ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ)

= (1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ × 2ನೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ)

+ (2ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ ×1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ)

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿದರೆ

$$\frac{d}{dx}(uvw) = uv.\frac{dw}{dx} + uw.\frac{dv}{dx} + vw.\frac{du}{dx}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

11.8.10 ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

u, vಗಳು xನ ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ.

$y=\frac{u}{v}$ ಆಗಿರಲಿ.

x ನಲ್ಲಿ δx ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಆದರೆ u ನಲ್ಲಿ δu ಮತ್ತು v ನಲ್ಲಿ δv ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಆಗುವುದು.

$$\therefore\ y+\delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v}$$

ಮತ್ತು $$\delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{\cancel{vu}+v.\delta u-\cancel{uv}-u.\delta v}{v(v+\delta v)}$$

$$\therefore\ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v+\delta v)} \cdot \frac{1}{\delta x}$$

$$= \frac{v.\frac{\delta u}{\delta x} - u.\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v+\delta v)}$$

$\delta x \to 0$ ಆದಾಗ δu, δv ಗಳೂ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ

$$\lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{\left(v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}\right)}{v(v+\delta v)}$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}}$$

11.8.11 a^x ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = a^x$ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore\ y+\delta y = a^{x+\delta x}$$

$$\therefore\ \delta y = a^{x+\delta x} - a^x$$

$$= a^x(a^{\delta x} - 1)$$

$$\therefore\ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x(a^{\delta x}-1)}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{a^x(a^{\delta x}-1)}{\delta x} \qquad \dots (1)$$

$a^{\delta x}-1 = h$ ಇರಲಿ. $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ $h \to 0$ ಆಗುವುದು.

$\therefore a^{\delta x} = 1+h$

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಲಾಗರಿತಮ್ ತೆಗೆದಾಗ

$\delta x \log a = \log (1+h)$

$$\therefore \frac{a^{\delta x}-1}{\delta x} = \frac{h. \log a}{\log (1+h)}$$

$$= (\log a) \left[\frac{h}{\log (1+h)}\right]$$

$$= (\log a) \left[\frac{1}{\frac{1}{h}\log (1+h)}\right]$$

$$= (\log a) \frac{1}{\log (1+h)^{1/h}}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{a^{\delta x}-1}{\delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\log a}{\log (1+h)^{1/h}}$$

$$= \frac{\log a}{\log e} \qquad \left[\text{ಏಕೆಂದರೆ } \lim_{h \to o} (1+h)^{1/h} = e\right]$$

$$= \log_e a \qquad \ldots (2)$$

(2) ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುವುದರಿಂದ

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = \log_e a) a^x}$$

ಇದೇ ರೀತಿ $y = e^x$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x. \log_e e$ ಎಂದು ಬರುವುದು.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x . 1$$

$$= e^x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

11.8.12 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

(1) **sin*x***

$y = \sin x$ ಆಗಿರಲಿ.

$y + \delta y = \sin(x + \delta x)$

$\therefore \delta y = \sin(x + \delta x) - \sin x$

$$\left[\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \text{ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ}\right]$$

$$\delta y = 2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\delta x}{2}}$$

$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\frac{\delta x}{2}}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx} = \cos x.1 \qquad \left[\text{ಏಕೆಂದರೆ } \lim_{\theta \to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$$

(2) **cos*x***

$y = \cos x$ ಆಗಿರಲಿ.

$y + \delta y = \cos(x + \delta x)$

$\therefore \delta y = \cos(x + \delta x) - \cos x$

$$\left[\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \text{ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ}\right]$$

$$\delta y = -2 \sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = -2 \sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) . \frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -2. \lim_{\delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right). \frac{1}{2}$$

$$= -\sin x .1$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ $\left[\text{ಏಕೆಂದರೆ } \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

(3) tan*x*

$y = \tan x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

ಮತ್ತು $y+\delta y = \tan(x+\delta x) = \frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)}$

$$\therefore \delta y = \frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x)\cos x - \cos(x+\delta x)\sin x}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

[sin (*A*–*B*) = sin *A* cos *B* – cos *A* sin *B* ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ]

$$\delta y = \frac{\sin(x+\delta x-x)}{\cos(x+\delta x)\cos x} = \frac{\sin\delta x}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin\delta x}{\cos(x+\delta x).\cos x.\delta x} = \frac{\sin\delta x}{\delta x} . \frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) \cdot \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{1}{\cos(x+\delta x).\cos x}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1. \frac{1}{\cos x \cdot \cos x} \quad \left[\text{ಏಕೆಂದರೆ } \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

(4) cotx

$y = \cot x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಥವಾ $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

ಮತ್ತು $y+\delta y = \cot(x+\delta x) = \dfrac{\cos(x+\delta x)}{\sin(x+\delta x)}$

$$\therefore \delta y = \frac{\cos(x+\delta x)}{\sin(x+\delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos(x+\delta x)\sin x - \sin(x+\delta x)\cos x}{\sin(x+\delta x)\sin x}$$

$$= \frac{-[\sin(x+\delta x)\cos x - \cos(x+\delta x)\sin x]}{\sin(x+\delta x)\sin x}$$

[$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ]

ಅಂದರೆ, $\delta y = \dfrac{-\sin(x+\delta x - x)}{\sin(x+\delta x)\sin x}$

$$= \frac{-\sin \delta x}{\sin(x+\delta x) \cdot \sin x}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\sin \delta x}{\delta x \cdot \sin(x+\delta x) \cdot \sin x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin\delta x}{\delta x} \quad \frac{1}{\sin(x+\delta x) \cdot \sin x}$$

$$= -\frac{1}{\sin(x+0) \cdot \sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

(5) **sec$x$**

$y = \sec x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $y = \dfrac{1}{\cos x}$

$$y+\delta y = \sec(x+\delta x) = \frac{1}{\cos(x+\delta x)}$$

$$\therefore \delta y = \frac{1}{\cos(x+\delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\left[\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \text{ ಉಪಯೋಗಿಸಿ}\right]$$

$$\delta y = \frac{-2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{-\delta x}{2}\right)}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos(x+\delta x) \cdot \cos x \, \frac{\delta x}{2} \cdot 2}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}}{\cos(x+\delta x)\,\frac{\delta x}{2}\cos x}\right]$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x \,.\, \cos x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan x \,.\, \sec x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$$

(6) cosec*x*

$y = \text{cosec}x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $y = \frac{1}{\sin x}$

$$y + \delta y = \text{cosec}\,(x + \delta x) = \frac{1}{\sin\,(x + \delta x)}$$

$$\delta y = \frac{1}{\sin\,(x+\delta x)} - \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x - \sin\,(x+\delta x)}{\sin\,(x+\delta x)\,.\,\sin x}$$

$\left[\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\,.\,\sin\frac{A-B}{2} \right.$ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\left. \right]$

$$\delta y = \frac{2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\delta x}{2}\right)}{\sin\,(x+\delta x).\,\sin x}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right).\,\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\sin\,(x+\delta x).\,\sin x\,\frac{\delta x}{2}\,.\,2}$$

$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)}{\sin\,(x+\delta x)\sin x}\,.\,\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin x \,.\, \sin x}$$

$$= -\cot x.\ \mathrm{cosec}\, x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x) = -\ \mathrm{cosec}\, x\ \cot x}$$

11.8.13 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ log*x*ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = \log x$ ಆಗಿರಲಿ.

$$y+\delta y = \log(x+\delta x)$$

$$\therefore \delta y = \log(x+\delta x) - \log x$$

$$= \log \frac{(x+\delta x)}{x}$$

$$\delta y = \log\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \log\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\delta x} \log\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \log_e \left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \log_e \left(1+\frac{\delta x}{x}\right)\right]^{\frac{x}{\delta x}}$$

$\frac{\delta x}{x} = z$ ಇರಲಿ. ಆಗ, $\delta x \to 0$ ಆದರೆ $z \to 0$

ಮತ್ತು $\frac{x}{\delta x} = \frac{1}{z}$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{x} \log_e (1+z)^{1/z} \right]$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_e e$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx} [\log x] = \frac{1}{x}}$$

ಇದುವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡ ಬೇಕಾಗುವುದು:

1. $\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$

2. $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$

3. $\frac{d}{dx} (\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$

5. $\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$

6. $\frac{d}{dx} (\tan x) = \sec^2 x$

7. $\frac{d}{dx} (\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

8. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$

9. $\frac{d}{dx} (\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

10. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

11. $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

12. $\frac{d}{dx}(\text{constant}) = 0$

13. $\frac{d}{dx}[k.\ f(x)] = k.\frac{d}{dx}\ f(x)$

II 1. **ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರ**

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$ ಅಥವಾ

$$= (\text{1 ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ})\frac{d}{dx}(\text{2 ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ})$$

$$+ (\text{2 ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ})\frac{d}{dx}(\text{1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ})$$

2. **ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸೂತ್ರ**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{\text{ಛೇದ}\ .\frac{d}{dx}(\text{ಅಂಶ}) - \text{ಅಂಶ}\ .\frac{d}{dx}(\text{ಛೇದ})}{(\text{ಛೇದ})^2}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

I. ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ $\frac{1}{x^2}$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y+\delta y = \frac{1}{(x+\delta x)^2}$$

$$\delta y = \frac{1}{(x+\delta x)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-(x+\delta x)^2}{(x+\delta x)^2 . x^2} = \frac{-2x.\delta x - (\delta x)^2}{(x+\delta x)^2 . x^2}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\delta x[2x+\delta x]}{\delta x\,(x+\delta x)^2 . x^2}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0} \frac{(2x+\delta x)}{(x+\delta x)^2 . x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{x^2 . x^2} = \frac{-2}{x^3}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\right] = \frac{-2}{x^3}$$

ಸೂಚನೆ: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{-n}{x^{n+1}}$

ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಈ ಮುಂದಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ :

2. $ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3.a.x^2 + 2.bx + c$$

$$= 3ax^2 + 2bx + c$$

3. $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$

$$y = \left[1 - \frac{1}{x}\right]^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} - 2\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2}$$

4. $(ax+b)(x^2+cx+c^2)$

$y=(ax+b)(x^2+cx+c^2)$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(ax+b).\frac{d}{dx}(x^2+cx+c^2)+(x^2+cx+c^2)\frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$=(ax+b)(2x+c)+(x^2+cx+c^2)(a)$$

$$=(ax+b)(2x+c)+a(x^2+cx+c^2)$$

$$=3ax^2+2(ac+b)x+bc+ac^2$$

5. $\sqrt{x}(x-1)(x-2)$

$y=\sqrt{x}(x-1)(x-2)$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}(x-1)\frac{d}{dx}(x-2)+\sqrt{x}.(x-2).\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$+(x-1)(x-2).\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$=\sqrt{x}.(x-1).1+\sqrt{x}(x-2).1+(x-1)(x-2).\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{x}(x-1)+\sqrt{x}(x-2)+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)(x-2)$$

$$=\frac{5x^2-9x+2}{2\sqrt{x}}$$

6. $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$

$y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+2x+4).\frac{d}{dx}(x^2-2x+4)-(x^2-2x+4)\frac{d}{dx}(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)^2}$$

$$=\frac{(x^2+2x+4)(2x-2)-(x^2-2x+4)(2x+2)}{(x^2+2x+4)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2+2x+4-x^2+2x-4)-2(x^2+2x+4+x^2-2x+4)}{(x^2+2x+4)^2}$$

$$= \frac{2x(4x)-2(2x^2+8)}{(x^2+2x+4)^2}$$

$$= \frac{4(x^2-4)}{(x^2+2x+4)^2}$$

7. $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

$y = \dfrac{1+x^{1/2}}{1-x^{1/2}}$ ಆಗಿರಲಿ

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^{1/2})\frac{d}{dx}(1+x^{1/2})-(1+x^{1/2})\frac{d}{dx}(1-x^{1/2})}{(1-x^{1/2})^2}$$

$$= \frac{(1-x^{1/2})\frac{1}{2}x^{-1/2}-(1+x^{1/2})(-\frac{1}{2}.x^{-1/2})}{(1-x^{1/2})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(1-x^{1/2}+1+x^{1/2})}{(1-x^{1/2})^2}$$

$$= \frac{x^{-1/2}}{(1-x^{1/2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(1-x^{1/2})^2} \text{ or } \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

8. $y = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\sqrt{x}).1-x(\frac{1}{2}.x^{-1/2})}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{1/2}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$$

9. $y = 8\sqrt{x}.\log x$

$$\frac{dy}{dx} = 8\left[\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\frac{d}{dx}(x^{1/2})\right]$$

$$= 8\left[x^{½}.\frac{1}{x} + (\log x)\frac{1}{2}x^{-½}\right]$$

$$= 8\left[\frac{1}{x^{½}} + \frac{\log x}{2x^{½}}\right]$$

$$= 8\left[\frac{2+\log x}{2x^{½}}\right] = \frac{4(2+\log x)}{x^{½}}$$

10. $y = x^2 e^x \log x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2.e^x.\frac{d}{dx}(\log x) + x^2 \log x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x.\log x\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2.e^x.\frac{1}{x} + x^2(\log x)e^x + e^x(\log x).2x$$

$$= xe^x + x^2e^x \log x + 2xe^x \log x$$

$$= xe^x(1 + x\log x + 2\log x)$$

11. $f(x) = x^8 - 7x^7 + x^2 + 1$ ಆದರೆ $f'(1)$ ಬೆಲೆ ಏನು?

$f\ (x) = 8x^7 - 7.7.x^6 + 2x = 8x^7 - 49x^6 + 2x$

$\therefore f'(1) = 8.(1)^7 - 49.(1)^6 + 2.1 = 8-49 + 2 = -39.$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.2

1. x, x^{20}, x^{-1}, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{-5}{6}}$, $\sqrt[4]{x^{-5}}$, $\frac{1}{x^{1/3}}$, $3x^{\frac{5}{6}}$, $2x^{\frac{1}{3}}$

ಇವುಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

2. $\log x$, x^7, $-10x^{-3}$, $x^{-½}$; $2x^{-3/5}$ ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ

3. $y = ax + b$
4. $y = mx + c$
5. $y = 2e^x + bx^2 + c$
6. $y = a - bx$
7. $y = 1 - \frac{x}{a}$
8. $y = 3\log x + 3e^x + qx^3$
9. $y = ae^x + x^{-7} + x^{-5} + c$
10. $y = ax^2 + bx + c$
11. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$
12. $y = x^{1/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$
13. $y = x^3 + 3a^2x + 3ax^2 + a^3$
14. $y = (x-a)^3$
15. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}$

16. $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

17. $y = (x+l)(x+m)$

18. $y = (x+p)(x+q)(x+r)$

19. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

20. $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

21. $y = \dfrac{2+x^2}{1+x}$

22. $y = \dfrac{1-x}{1+x+x^2}$

23. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

24. $y = \dfrac{p-qx}{q+px}$

25. $y = \dfrac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}}$

26. $y = \dfrac{\sqrt{x}-x}{1+x^{3/2}}$

27. $y = \dfrac{x+bx}{a-bx}$

28. $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$

29. $y = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

30. $y = \dfrac{a-x}{a+x}$

31 $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 1$ ಆದರೆ $f'(1)$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

32. $y = x^{1/2} + x^{1/3} - 2x^{1/5}$ ಆದರೆ $y'(1)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

33. $y = (2x+5)(x-7)$ ಆದರೆ $y'(2)$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

34. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ (x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ)

(i) $x^n + a^n$

(ii) $x^{1/2} + a^{1/2}$

(iii) $(px)^n + q$

(iv) $p^n(x+q)$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\cos 3x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \cos 3x$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\ y + \delta y = \cos 3\,(x + \delta x)$

$\therefore\ \delta y = \cos\,(3x + 3\ \delta x) - \cos 3x$

$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\ \sin\frac{D-C}{2}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$\delta y = 2\sin\left(3x + \frac{3\delta x}{2}\right)\ \sin\left(\frac{-3\delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -2\sin\left(3x + \frac{3\delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{3\delta x}{2}\right)}{\frac{3\delta x}{2} \times \frac{2}{3}}$$

$$= -3\sin\left(3x + \frac{3\delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{3\delta x}{2}\right)}{\frac{3\delta x}{2}}$$

$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = -3.\lim_{\delta x \to 0}\ \sin\left(3x + \frac{3\delta x}{2}\right).\ \frac{\sin\frac{3\delta x}{2}}{\frac{3\delta x}{2}}$$

i.e $\frac{dy}{dx} = -3.\sin 3x.1$

$= -3\sin 3x$

$\therefore\ \frac{d}{dx}(\cos 3x) = -3\sin 3x$

2. e^{ax} ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = e^{ax}$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\ y + \delta y = e^{a(x+\delta x)}$

$$\delta y = e^{a(x+\delta x)} - e^{ax}$$

$$= e^{ax}(e^{a\delta x} - 1)$$

$$= e^{ax}\left[\left(1 + \frac{a\delta x}{\angle 1} + \frac{(a\delta x)^2}{\angle 2} + \frac{(a\delta x)^3}{\angle 3} + \dots + \infty\right) - 1\right]$$

$$= e^{ax}\left[\frac{a\delta x}{\angle 1} + \frac{(a\delta x)^2}{\angle 2} + \frac{(a\delta x)^3}{\angle 3} + \dots \infty\right]$$

$$\delta y = e^{ax}.\, a\,\delta x\left[\frac{1}{\angle 1} + \frac{a\delta x}{\angle 2} + \frac{a^2(\delta x)^2}{\angle 3} + \dots.. + \infty\right]$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = e^{ax}.a\left[\frac{1}{\angle 1} + \frac{a\delta x}{\angle 2} + \frac{a^2(\delta x)^2}{\angle 3} + \dots. \infty\right]$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = ae^{ax}\,[1 + 0]$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx} = ae^{ax} \quad \therefore \quad \frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$

ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ :

3. $\sqrt{x}.\sin x$

$y = \sqrt{x}.\sin x$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{x}.\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= x^{1/2}\cos x + \sin x.\ 1/2\ x^{-1/2}$$

$$= \sqrt{x}\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2x\cos x + \sin x}{2\sqrt{x}}$$

4. $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$$y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\sin x)\,(-\cos x) - (1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

i.e $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

5. $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)\,(+\sin x) - (1-\cos x)\,(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

6. $y = \dfrac{x^n}{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x.\, nx^{n-1} - x^n\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{nx^{n-1}\,\sin x - x^n\cos x}{\sin^2 x}$$

7. $y = \dfrac{3 + 4\sin x}{4 + 3\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4+3\sin x).\dfrac{d}{dx}(3+4\sin x) - (3+4\sin x)\dfrac{d}{dx}(4+3\sin x)}{(4+3\sin x)^2}$$

$$= \frac{(4+3\sin x).4\cos x - (3+4\sin x).\,3\cos x}{(4+3\sin x)^2}$$

$$= \frac{16\cos x - 9\cos x}{(4+3\sin x)^2}$$

$$= \frac{7\cos x}{(4+3\sin x)^2}$$

8. $y = e^x\cos x\log x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x.\cos x.\frac{d}{dx}(\log x)+e^x\log x\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x.\log x\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}e^x\cos x + e^x.\log x(-\sin x) + \cos x \quad \log x.e^x$$

$$= \frac{e^x\cos x}{x} - e^x\sin x.\log x + e^x\cos x.\log x$$

i.e., $$\frac{dy}{dx} = e^x\left[\frac{\cos x}{x} - \sin x.\log x + \cos x.\log x\right]$$

9. $$y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)\frac{d}{dx}(e^x-1) - (e^x-1)\frac{d}{dx}(e^x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x+1)e^x - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x+1 - e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

10. $$y= x\sin x + \cos x + \frac{1}{12}\tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = x.\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin x.\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(\cos x)+\frac{1}{12}\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= x\cos x + \sin x.1 - \sin x + \frac{1}{12}.\sec^2 x$$

11. $$y= \mathrm{cosec}x + \sec x + 3\cot x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{cosec}x.\cot x + \sec x.\tan x - 3.\mathrm{cosec}^2x$$

12. $f(x) = \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ ಆದರೆ $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ಎಷ್ಟು?

$$f'(x) = \frac{(1-\tan x)\frac{d}{dx}(1+\tan x) - (1+\tan x)\frac{d}{dx}(1-\tan x)}{(1-\tan x)^2}$$

i.e., $f'(x) = \dfrac{(1-\tan x).\sec^2 x - (1+\tan x).(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)^2}$

$$= \frac{\sec^2 x\,(1-\tan x + 1 + \tan x)}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\left(1-\tan\frac{\pi}{3}\right)^2} = \frac{2.(2)^2}{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{8}{4-2\sqrt{3}} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} = 4(2+\sqrt{3})$$

11.9 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಿಕ್ ಕೊಸೈನ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು cosh$x$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ, ಹೈಪರ್ ಬೊಲೀಕ್‌ಸೈನ್ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು sinh$x$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉಳಿದ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನೂ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{cosech}x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

ಈ ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\text{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$
3. $\text{cosech}^2 x = \coth^2 x - 1$
4. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$
5. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
6. $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$
7. $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$
8. $\dfrac{\sinh 2x}{1 + \sinh^2 x} = 2\tanh x$

11.10 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

1. $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$\left[\text{ಏಕೆಂದರೆ} \quad \dfrac{d(e^{ax})}{dx} = ae^{ax} \right]$

$= \cosh x$ (ವ್ಯಾಖ್ಯೆ)

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x}$$

2. $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}] \quad \left[\because \frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax} \right]$$

$= \sinh x$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x}$$

3. $y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x \dfrac{d}{dx}(\sinh x) - \sinh x \dfrac{d}{dx}(\cosh x)}{(\cosh x)^2}$$

$$= \frac{\cosh x.\cosh x - \sinh x.\sinh x}{(\cosh x)^2}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2}$$

$$= (\text{sech}\, x)^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2 x}$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಕೆಳಗಿನ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

4. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\text{cosech}^2 x$

5. $\dfrac{d}{dx}(\text{sech}\, x) = -\text{sech}\, x \tanh x$

6. $\dfrac{d}{dx}(\text{cosech}\, x) = -\text{cosech}\, x \coth x$

ಹೈಪರ್‌ಬಾಲಿಕ್ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾಗುವುದು.

	ಉತ್ಪನ್ನ y ಅಥವಾ $f(x)$	ನಿಷ್ಪನ್ನ $[dy/dx$ ಅಥವಾ $f^1(x)]$
1.	$\sinh x$	$\cosh x$
2.	$\cosh x$	$\sinh x$
3.	$\tanh x$	$\text{sech}^2 x$

4.	coth$x$	$-\text{cosech}^2 x$
5.	sech$x$	$-\text{sech}x \tanh x$
6.	cosech$x$	$-\coth x\, \text{cosech}x$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \dfrac{x \cosh x}{1+\cosh x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cosh x).\frac{d}{dx}(x\cosh x) - (x\cosh x).\frac{d}{dx}(1+\cosh x)}{(1+\cosh x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cosh x)\,[x\sinh x + \cosh x] - x\cosh x.\, \sinh x}{(1+\cosh x)^2}$$

$$= \frac{x\sinh x + \cosh x + x\sinh x \cosh x + \cosh^2 x - x\cosh x \sinh x}{(1+\cosh x)^2}$$

i.e., $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x \sinh x + \cosh x + \cosh^2 x}{(1 + \cosh x)^2}$

2. $y = x^2 \tanh x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 \text{sech}^2 x + \tanh x.\, 2x$$

$$= x^2\, \text{sech}^2 x + 2x\tanh x$$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.3

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

1. $x - \tan x$
2. $x \tan x$
3. $\dfrac{x}{\tan x}$
4. $\sqrt{x} \cot x$
5. $\sqrt{x} + \cot x$
6. $\dfrac{\sqrt{x}}{\cot x}$
7. $\dfrac{\sec x}{a}$
8. $a \sec x$
9. $\sqrt{x} \log_e x \tan x$
10. $\dfrac{\sqrt{x} \log_e x}{\cot x}$
11. $e^x \sin x \log_e x$
12. $\dfrac{5+3\operatorname{cosec} x}{3+5 \cot x}$
13. $\dfrac{a+b \cos x}{b+a \cos x}$
14. $\dfrac{1+\sec x - \cos x}{\sin x}$
15. $\dfrac{e^x}{e^x+1}$
16. $e^x \log_e x$
17. $(1-x^2) \cos x - \log_e x$

18. $\log_x a$

19. $y = \dfrac{\sin x}{x}$ ಆದರೆ, $\dfrac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು

$x = \dfrac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $f(x) = \dfrac{3\cos x+4}{4-3\cos x}$ ಆದರೆ $f^1(0)$ ಮತ್ತು $f^1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

21. ಮೂಲತತ್ತ್ವದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ
$\tan 2x$, $\sec 3x$, $\operatorname{cosec} 2x$, $\sin 3x$

22. $f(x) = \sin x + 2\cos x$ ಆದರೆ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ಬೆಲೆಯು $\cos x - 2\sin x$ ಆಗುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

23. $e^x \operatorname{cosech} x$

24. $\dfrac{xe^x}{1+\cosh x}$

25. $\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}$

26. $\dfrac{x}{\sinh x}$

27. $\dfrac{\sinh x}{1+\cosh x}$

28. $e^x \cosh x + \log x \cosh x$

29. $e^x \tanh x$

30. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \tanh x$

31. $\dfrac{(x+2)\sinh x}{x^2+1}$

32. $e^x \operatorname{cosech} x$

11.11 ಸಂಯುಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು (ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ)

$y = f(u)$ ಮತ್ತು $u = F(x)$ ಇದ್ದಾಗ, y ಎನ್ನುವುದು x ನಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವುದು.

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$$

ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\delta u \to 0$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta u \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿದರೆ,

$y = f(u)$, $u = \phi(t)$, $t = \psi(w)$ ಮತ್ತು $w = F(x)$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dw} \frac{dw}{dx}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \sin(\log x)$

ಇಲ್ಲಿ, $y = \sin u$, $u = \log(x)$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಆಗ

$$\frac{dy}{du} = \cos u, \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \text{ ಮತ್ತು } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos u . \frac{1}{x} = \cos(\log x) . \frac{1}{x}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos(\log x)}{x}$

2. $y = \cosh^2 x^n$

$u = x^n$, ಇರಲಿ ಮತ್ತು $v = \cosh u$ ಇರಲಿ.

ಆಗ $y = v^2$

ಈಗ, $\dfrac{du}{dx} = nx^{n-1}$, $\dfrac{dv}{du} = \sinh u$, $\dfrac{dy}{dv} = 2v$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$= 2v. \sinh u. nx^{n-1}$

$= 2 \cosh u. \sinh u. nx^{n-1}$

ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{dx} = 2n\, x^{n-1} \cosh x^n \sinh x^n$

ಸೂಚನೆ: ಅನೇಕ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ, ಈ ರೀತಿ u, v ಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸದೆಯೂ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈಗ, $y = \cosh^2 x^n$ ಅಂದರೆ

$y = (\cosh x^n)^2$

ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ, ಘಾತದ ಉತ್ಪನ್ನ, ನಂತರ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ, ನಂತರ x^n ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟಿದೆ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cosh x^n. \sinh x^n. nx^{n-1}$$

$$= 2nx^{n-1}. \cosh x^n. \sinh x^n$$

3. $y = \tanh^m x^n = (\tanh x^n)^m$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = m(\tanh x^n)^{m-1} (\text{sech}^2 x^n)\, nx^{n-1}$$

$$= mnx^{n-1} (\tanh^{m-1} x^n) (\text{sech}^2 x^n)$$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.4

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ

1. $\sin ax$
2. $\sin\left(\frac{ax}{b}\right)$
3. $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
4. $x\sin x^2$
5. $x^2\sin ax^3$
6. $\cos ax$
7. $\cos\left(\frac{x}{a}\right)$
8. $x\cos(x^2+1)$
9. $x^2\cos(1+x^3)$
10. $\sin^2 x$
11. $\cos^2 x$
12. $\sin^2 x\cos x$
13. $\cos^3 x\sin x$
14. $\sec^2 x\tan x$
15. $\tan mx$
16. $\cot ax$
17. $\sec ax$
18. $\operatorname{cosec} mx$
19. $(\tan x-\cot x)^2$
20. $e^{m\sin x}$

21. $e^{m\tan\sqrt{x}}$

22. $\log(a+be^{m\cos x})$

23. $x\sqrt{\log x}$

24. $\sin(\log x)$

25. $\log(\sin x)$

26. $\log(\sin x^n)$

27. $\sin\sqrt{x}$

28. $\sqrt{\sin x}$

29. $\log\sqrt{\sin x}$

30. $\log\tan x$

31. $\log(\sin x^n)$

32. $\log\sqrt{x}$

33. $\log x^5$

34. $\tan(\log x)$

35. $\sqrt{\cot\log x}$

36. $\sqrt{\cos\sqrt{x}}$

37. e^{3x}

38. $e^{\sin x}$

39. $(1+x^2)^{1/2}$

40. $(1+x^2)^{-1/2}$

41. $x+\sqrt{x^2+1}$

42. $(ax+b)^n$

43. $(x^2+a)^n$

44. $\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a-x}}$

45. $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

(46. $\sin^m x \cos^n x$

47. $\dfrac{\sin^m x}{\cos^n x}$

48. $\sin^n(nx^n)$

49. $e^{\sqrt{\sin x}}$

50. $\log \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

51. $\dfrac{e^{2x}+e^{3x}}{1+e^{-x}}$

11.12 ವಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

$y = f^{-1}(x)$ ಆದರೆ $x = f(y)$ ಆಗುವುದು

ಮತ್ತು $\dfrac{dx}{dy} = f'(y)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಸೂಚನೆ: ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1. $y = \sin^{-1}x$

ಅಂದರೆ $x = \sin y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cos y$$

ಅಥವಾ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

2. $y = \cos^{-1}x$

$\therefore\ x = \cos y$

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

3. $y = \tan^{-1}x$

$\therefore\ x = \tan y$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1+\tan^2 y = 1+x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

ಅಂದರೆ, $\boxed{\frac{dy}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}}$

4. $y = \cot^{-1}x$

$\therefore\ x = \cot y$

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec}^2 y = -(1+\cot^2 y) = -(1+x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}}$$

5. $y = \sec^{-1}x$

$\therefore \; x = \sec y$

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \tan y = x. \sqrt{\sec^2 y - 1} = x\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \; \boxed{\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

6. $y = \text{cosec}^{-1}x$

ಇಲ್ಲಿ, $y = \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}x$

$$\therefore \; \boxed{\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

ಸೂಚನೆ: $\cos^{-1}x$,$\cot^{-1}x$ ಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$$\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x,$$

$$\cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಉದಾರಹಣೆಗಳು

1. $y = \sin^{-1}x$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \sin^{-1}x$ ಅಂದರೆ $x = \sin y$

$\therefore \; x + \delta x = \sin(y + \delta y)$

$\therefore \; \delta x = \sin(y + \delta y) - \sin y$

$$= 2\cos\frac{2y+\delta y}{2} \sin\frac{\delta y}{2}$$

ಏಕೆಂದರೆ, $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

$$\therefore \quad \frac{\delta x}{\delta y} = 2\cos\left(y + \frac{\delta y}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta y}{2}}{2 \cdot \frac{\delta y}{2}}$$

$\therefore \lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta x}{\delta y} = \cos y.1$ ಅಥವಾ $\frac{dx}{dy} = \cos y$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

ಈ ಮುಂದಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರಗಳ ಬಳಕೆಯಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

2. $y = \frac{x}{\cos^{-1}x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^{-1}x.1 - \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\cos^{-1}x)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x + x}{(\cos^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

3. $y = e^{m\cos^{-1}\left(\log\cos\sqrt{x}\right)}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{m\cos^{-1}\left(\log\cos\sqrt{x}\right)}\frac{d}{dx}(m\cos^{-1}\log\cos\sqrt{x})$$

$$e^{m\cos\ \log\cos\sqrt{x}} = \frac{m}{[1-(\log\cos\sqrt{x})^2]^{½}} \cdot \frac{1}{(\cos\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = \frac{m \cdot e^{m\cos^{-1}\left(\log\cos\sqrt{x}\right)}}{2\sqrt{x}\,(\cos\sqrt{x})\,\{1-(\log\cos x)^2\}^{½}}$

4. $y = \tan^{-1} \sqrt{\sqrt{x}+\cos^{-1}x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\{\sqrt{x}+\cos^{-1}x\}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}+\cos^{-1}x\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{1+(\sqrt{x}+\cos^{-1}x)} \cdot \frac{1}{2\,(\sqrt{x}+\cos^{-1}x)^{1/2}} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$\text{i.e., } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}, \sqrt{1-x^2}, (\sqrt{x}+\cos^{-1}x)^{1/2}\,\{1+\sqrt{x}+\cos^{-1}x\}}$$

5. $y = \sin^{-1} \dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

$$= \frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b^2-a^2)\,(1-\cos^2 x)}}\ \frac{(b+a\cos x)\,(-b\sin x)-(a+b\cos x)\,(-b\sin x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$= \frac{1\,(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{(b+a\cos x)\sin x} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$$

6. $y = \cos\left(a\sin^{-1}\dfrac{1}{x}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sin\left(a\sin^{-1}\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(a\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\sin\left(a\sin^{-1}\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{a}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{a\sin\left(a\sin^{-1}\dfrac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$ ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin (a \operatorname{cosec}^{-1} x)}{x\sqrt{x^2-1}}$$

ಈ ಮುಂದಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾಗುವುದು:

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

4. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x)\ \dfrac{-1}{1+x^2}$

5. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

6. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.5

ಇವುಗಳನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ

1. $y = \tan^{-1} x^2$
2. $y = \tan^{-1} e^x$
3. $y = \log \tan^{-1} x$
4. $y = \log (\tan x)^{-1}$
5. $y = \tan^{-1} \dfrac{x}{a}$
6. $y = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
7. $y = (\tan^{-1} x^p)^q$
8. $y = \tan x . \sin^{-1} x$
9. $y = \sec^{-1}(\tan x)$
10. $y = \tan^{-1} (\sec x)$
11. $y = e^x \sin^{-1} x$
12. $y = e^{m\sin^{-1} x}$
13. $x \sin^{-1} x$
14. $y = e^x \cos^{-1} x$
15. $y = e^{m \tan^{-1} x}$
16. $y = e^{m\sin^{-1} \log \cos \sqrt{x}}$
17. $y = \log (a + b e^{m\sin^{-1} x})$
18. $y = \log (4 + 3 e^{m \tan^{-1} x})$
19. $y = (x \sin^{-1} x)^m$
20. $y = (x + \cos^{-1} x)^n$
21. $y = \tan^{-1} \dfrac{x\cos\alpha}{1 + x \sin\alpha}$
22. $y = \cot^{-1} \dfrac{x \sin\alpha}{1 + x\cos\alpha}$
23. $y = e^{x\cos^{-1} e + e \cos^{-1} x}$
24. $y = x\, e^{m\sin^{-1} \sqrt{x}}$
25. $y = (\sec^{-1} x)^2$
26. $y = \log \operatorname{cosec}^{-1} x$

    $+ x \quad \sqrt{\log x}$
27. $y = e^{m\cos^{-1} x}$
28. $y = \tan^{-1} \dfrac{a + b\cos x}{b + a \cos x}$
29. $y = \dfrac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \tan^{-1} \dfrac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}}$
30. $y = \dfrac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \dfrac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}}$
31. $y = \tan^{-1} \left(\dfrac{x^2 - 1}{2x} \right)$
32. $y = \sin^{-1} x^2$

33. $y = \cos^{-1}\sqrt{x}$

34. $y = \sin^{-1}\dfrac{1}{x}$

35. $y = \cos^{-1}\sqrt{1-x}$

36. $y = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

37. $y = \cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

38. $y = \tan^{-1}\dfrac{x\sin\alpha}{1+x\cos\alpha}$

11.13 ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ (ಆದೇಶ ಕ್ರಮದಿಂದ)

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನೇರವಾಗಿ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಬದಲಾಗಿ, ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಆದೇಶದಿಂದ ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದು ನಂತರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭ ಮಾರ್ಗ ಎನಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \cos^{-1}(4x^3-3x)$

$x = \cos\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಉತ್ಪನ್ನವು ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$$y = \cos^{-1}(4x^3-3x)$$
$$= \cos^{-1}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$
$$= \cos^{-1}(\cos 3\theta)$$
$$= 3\theta$$
$$\therefore y = 3\cos^{-1}x$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. $y = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $\theta = \tan^{-1} x$

$$\therefore\ y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \tan^{-1}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

i.e., $y = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

3. $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

$x = \tan\theta$ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $\theta = \tan^{-1}x$

$$\therefore\ y = \tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$$

i.e., $y = 2\tan^{-1}x$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

4. $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$

$x^2 = \cos\theta$ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $\theta = \cos^{-1}x^2$ ಆಗುವುದು

ಈಗ, $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\cos\theta} = \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$

ಮತ್ತು $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$$\therefore\ y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \tan^{-1} \frac{1 - \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

i.e., $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x^2$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}\right) 2x = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^4}}$$

i.e., $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.6

(xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ) ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

1. $\sin^{-1}(3x-4x^3)$

2. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

4. $\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+a^4}}\right)$ (ಸೂಚನೆ: $x^2 = a^2\tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ)

5. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-x}{1+x^{3/2}}\right)$

6. $\cos^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{1/2}$ $(x= \cos 2\theta)$

7. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a(a^2-3x^2)}\right)$ (ಸೂಚನೆ : $x = a\tan\theta$ ಆದೇಶಿಸಿ)

8. $\cot^{-1}\left[\frac{(1+x)^{1/2}-(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}+(1-x)^{1/2}}\right]$

9. $\tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right)$

   (ಸೂಚನೆ : $\cos x$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $\frac{a}{b} = \tan\alpha$ ಆದೇಶಿಸಿ.)

10. $\cos^{-1}\left(\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}\right)$ (ಸೂಚನೆ: xನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $x = \tan\theta$ ಆದೇಶಿಸಿ).

11. $\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{1/2}$

12. $\sin^{-1}\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ ($x = \cos\theta$ ಆದೇಶಿಸಿ).

13. $\sin^{-1}[(2ax(1-a^2x^2)^{½}]$

14. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\sec^{-1}\frac{1}{1-2x^2}$

16. $\sec\tan^{-1}x$

17. $\cos^{-1}(1-2x^2)$

18. $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ [$x = \tan\theta$ ಆದೇಶಿಸಿ]

19. $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

11.14 ಹೈಪರ್‌ಬೊಲೀಯ ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

1. $\sinh^{-1} x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = \sinh^{-1} x$ ಇರಲಿ. ಆಗ

$\sinh y = x$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sinh y) = \frac{d}{dx}(x)$$

ಅಥವಾ $\cosh y \dfrac{dy}{dx} = 1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y}$$

| $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, $\therefore \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

2. $\cosh^{-1} x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = \cosh^{-1} x$ ಇರಲಿ. ಆಗ $x = \cosh y$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\cosh y)$$

ಅಥವಾ $1 = \sinh y \dfrac{dy}{dx}$

ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sinh y}$

| $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, $\therefore \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sinh y$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3. $\tanh^{-1}x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = \tanh^{-1}x$ ಇರಲಿ. ಆಗ $x = \tanh y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tanh y) = \frac{d}{dx}(x)$$

ಅಥವಾ $\operatorname{sech}^2 y \frac{dy}{dx} = 1$

ಈಗ, $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

$\cosh^2 y$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ

$1 - \tanh^2 y = \operatorname{sech}^2 y$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y}$$

$$= \frac{1}{1-\tanh^2 y}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \quad (x^2<1 \text{ ಆದಾಗ})$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (x^2<1)$$

4. $\coth^{-1} x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = \coth^{-1}x$ ಇರಲಿ. ಆಗ $x = \coth y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\coth y) = \frac{d}{dx}(x)$$

ಅಥವಾ $-\operatorname{cosech}^2 y \frac{dy}{dx} = 1$

ಈಗ, $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

$\sinh^2 y$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$\coth^2 y - 1 = \text{cosech}^2 y$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\text{cosech}^2 y} = -\frac{1}{\coth^2 y - 1}$$

$$= \frac{-1}{x^2-1} \quad (x^2>1)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{-1}{x^2-1} \quad (x^2>1)$$

5. $\text{sech}^{-1}x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = \text{sech}^{-1}x$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $x = \text{sech}y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{sech}y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$-\text{sech}y.\tanh y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$-x.\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = 1$$

$\text{sech}^2 y = 1-\tanh^2 y$

$\therefore \tanh y = \sqrt{1-\text{sech}^2 y}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (x^2<1)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (x^2<1)$$

6. $\text{cosech}^{-1} x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ

$y = \text{cosech}^{-1}x$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $x = \text{cosech}y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosech}y) = \frac{d}{dx}(x)$$

ಅಥವಾ $-\text{cosech}y.\coth y \frac{d}{dx} = 1$

ಈಗ, $\text{cosech}^2 y = -1+\coth^2 y$

$\therefore \coth^2 y = 1 + \text{cosech}^2 y$

$\coth y = \sqrt{1+\text{cosech}^2 y}$

ಇದನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$-\text{cosech}\, y.\ \sqrt{1+\text{cosech}^2 y}\ \dfrac{dy}{dx} = 1$

ಅಥವಾ $-x\sqrt{1+x^2}\ \dfrac{dy}{dx} = 1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

ಈ ಮುಂದಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾಗುವುದು:

1. $\dfrac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3. $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1} x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

4. $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \dfrac{-1}{x^2-1}$

5. $\dfrac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

6. $\dfrac{d}{dx}(\text{cosech}^{-1} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = \sinh^{-1}\dfrac{3x}{4}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3x}{4}\right)^2}}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9x^2}{4}}}\ \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4+9x^2}}\ \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{4+9x^2}}$$

2. $y = \sinh^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$

$u = \dfrac{1-x}{1+x}$ ಇರಲಿ.

ಆಗ $y = \sinh^{-1}u$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{du}{dx} = \frac{(1+x)(-1)-(1-x).1}{(1+x)^2}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} \qquad\qquad = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2+(1-x)^2}}$$

$$= \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1+x}{\sqrt{2}.\sqrt{1+x^2}}\ .\ \frac{(-2)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.7

(xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ) ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

1. $\sinh^{-1}\sqrt{x}$
2. $\cosh^{-1}\sqrt{1+x}$
3. $\sinh^{-1}(\text{cosec}x)$
4. $e^{m\sinh^{-1}x}$
5. $e^{\cosh^{-1}x}$
6. $x\cosh^{-1}x$
7. $\sqrt{1+x^2}.\sinh^{-1}x$
8. $\cosh^{-1}\sqrt{x}$
9. $\tanh^{-1}x^3$
10. $xe^{m\sinh^{-1}\sqrt{x}}$
11. $\tanh^{-1}\sqrt{½(1+x)}$
12. $\cosh^{-1}\dfrac{(2x^2-3)}{5}$
13. $\tanh^{-1}\tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)$
14. $\tanh^{-1}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$
15. $\tanh^{-1}\sqrt{x}$
16. $\sqrt{\tanh^{-1}\sqrt{x^3}}$
17. $(\tanh^{-1}x^2)^3$
18. $\tanh^{-1m}\sqrt{1+x}$
19. $\sqrt{\tanh^{-1}\sqrt{x}}$
20. $\sqrt{1+\tanh^{-1}x}$

11.15 ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಲಾಗರಿತಮೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ

11.15.1 ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

x ಮತ್ತು yಗಳ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಒಂದು ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನ $f(x,y)=0$ ಇರಲಿ. ಈ ಸಂಬಂಧ ತೋರಿಸುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಕಡೆಗೂ xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ $\dfrac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: $x^3+y^3=3axy$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಕಡೆಯೂ x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$3x^2+3y^2\frac{dx}{dx}=3a\left[x\frac{dx}{dx}+y.1\right]$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}\ (y^2-ax)=ay-x^2$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

11.15.2 ಲಾಗರಿತಮೀಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಲಾಗರಿತಮ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದು ನಂತರ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಲಾಗರಿತಮೀಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆ 1: $y=x^x$

ಲಾಗರಿತಮ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದರೆ

$$\log y=x\log x$$

ಆಗುವುದು. ಈಗ, ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=[x.\frac{1}{x}+1.\log x]$$

ಅಥವಾ $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=1+\log_e x$

ಅಥವಾ $\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\log_e e+\log_e x$ ($1=\log_e e$ ಆದ್ದರಿಂದ)

$$=\log ex$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=y.\log ex$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx}=x^x\log(ex)$

ಉದಾಹರಣೆ 2: $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲಾಗರಿತಮ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

$u = (\sin x)^{\cos x}$ ಮತ್ತು $v = (\cos x)^{\sin x}$ ಇರಲಿ.

ಆಗ $y = u + v$ ಆಗುವುದು

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

ಈಗ, $\log u = \cos x \log \sin x$

$$\frac{1}{u} \quad \frac{du}{dx} = (-\sin x) \log (\sin x) + \cos x . \frac{1}{\sin x} \cos x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log (\sin x)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (\sin x)^{\cos x} \left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log (\sin x)\right]$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\frac{dv}{dx} = (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \log (\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log (\sin x)\right]$$

$$+ (\cos x)^{\sin x} \left[\cos \log (\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$$

11.15.3 ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ಕೆಲವು ವೇಳೆ x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಚರಗಳೂ ಮೂರನೆಯ ಚರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಮೂರನೆಯ ಚರಕ್ಕೆ *ಪ್ರಮಿತಿ* ಅಥವಾ *ಪ್ರಚರ* ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಮಿತಿಯನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$x = f(t)$, $y = g(t)$ ಈ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಲ್ಲಿ t ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರಮಿತಿ (ಪ್ಯಾರಾಮೀಟರ್)

ಆಗಿರಲಿ. $x = f(t)$ ಆದಾಗ $t = f^{-1}(x)$ ಎಂಬ ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನ ಇರುವುದರಿಂದ

$$y = g(t) = gf^{-1}(x)$$

ಎಂಬ ಸಂಯುಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವುದು.

ಈಗ, $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta t} \cdot \frac{\delta t}{\delta x}$$

ಅಂದರೆ, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ಈಗ, $$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

ಅಥವಾ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1: $x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t$$

ಮತ್ತು $$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t \sin t}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = -\tan t$

ಉದಾಹರಣೆ 2:

$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^3)\,3a - 3at.3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a\,(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$

ಮತ್ತು $\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^3)\,6\,at - 3at^2.\,3t^2}{(1+t^3)^2}$

$$= \frac{6at + 6at^4 - 9at^4}{(1+t^3)^2} = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{3at\,(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \cdot \frac{(1+t^3)^2}{3a(1-2t^3)}$$

$$= \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

11.15.4 ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ :

$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ ಮತ್ತು $z = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ಇರಲಿ.

ಈಗ, $x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} \quad \therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $z = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta \qquad \therefore \frac{dz}{d\theta} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dz}{d\theta}} = \left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{1}{4}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{4}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x(1+y)^{½} + y(1+x)^{½} = 0$ ಆದರೆ

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $x(1+y)^{½} = -y(1+x)^{½}$

ಎರಡು ಕಡೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ

$x^2(1+y) = y^2(1+x)$ ಆಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, $x^2 + x^2y = y^2 + xy^2$

ಅಥವಾ $x^2 - y^2 = xy^2 - x^2y$

ಅಥವಾ $(x+y)(x-y) = -xy(x-y)$

ಅಥವಾ $(x-y)(x+y+xy) = 0$

ಒಂದು ವೇಳೆ $x=y$ ಆದರೆ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವು $2x(1+x)^{½} = 0$

$\therefore$ $x=0$ ಅಥವಾ $x=-1$ ಆಗುವುದು; ಇದು ಕ್ಷುಲ್ಲಕ ಬೆಲೆ.

$\therefore$ $x+y+xy=0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $(x \neq y)$ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$1 + \frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}(1+x) = -(y+1)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y}{1+x}$$

ಈಗ, $x+y+xy = 0$ ಎಂದಾಗ $y(1+x) = -x$

$$\therefore \ y = \frac{-x}{1+x}$$

ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು $\frac{dy}{dx}$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1-\frac{x}{1+x}\right)}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

2. $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x .... \infty}}}$

ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $y = \sqrt{\sin x + y}$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ

$$y^2 = \sin x + y$$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}(2y-1) = \cos x$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$

3. $y = (\sin x)^{\sin x^{\sin x^{\cdots}}}$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ $y = (\sin x)^y$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಲಾಗರಿತಮ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದರೆ

$$\log y = y \log(\sin x)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \log(\sin x) + \frac{y(\cos x)}{\sin x}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}\left[\frac{1}{y} - \log(\sin x)\right] = \frac{y\cos x}{\sin x}$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cos x}{\sin x[1-y\log(\sin x)]}$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cot x}{1-y\log(\sin x)}$

4. $x^y = e^{x-y}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಲಾಗರಿತಮ್ ತೆಗೆದರೆ

$$y \log x = (x-y)\log_e e$$

$$= (x-y).1$$

ಅಥವಾ $y \log x = x - y$ ....(1)

$$\therefore y \cdot \frac{1}{x} + \log x . \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}(\log x + 1) = -\frac{y}{x} + 1 = \frac{-y+x}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y+x}{x(1+\log x)}$ .... (2)

ಈಗ, $y(\log x+1) = x$ [(1) ರಿಂದ]

ಇದನ್ನು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x}{1+\log x}+x}{x(1+\log x)}$$

$$= \frac{-x+x+x\log x}{x(1+\log x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

5. $y = \log_{10}(x^3)$

$\therefore y = \frac{\log_e x^3}{\log_e 10}$ (ಬೀಜಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log_e 10} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x\log_e 10}$$

6. $y = a^x$

ಲಾಗರಿತಮ್ ತೆಗೆದಾಗ

$$\log y = x \log a$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a.1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\log a = a^x.\log a$$

7. $y = \left[\frac{(x+8)(x-2)}{(x^2+5)(5-3x^2)}\right]^{1/3}$

$$\therefore \log y = \frac{1}{3}[\log(x+8) + \log(x-2) - \log(x^2+5) - \log(5-3x^2)]$$

$$\therefore \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+8} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+5} - \frac{(-6x)}{5-3x^2}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{3}\left[\frac{1}{x+8} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+5} + \frac{6x}{5-3x^2}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{(x+8)(x-2)}{(x^2+5)(5-3x^2)}\right]^{1/3}\left[\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+5} + \frac{6x}{5-3x^2}\right]$$

8. $y = x^x \cos x$

$\therefore \log y = \log x^x + \log \cos x$

$= x \log x + \log \cos x$

$$\therefore \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x.1 - \frac{1}{\cos x}.\sin x$$

$$= 1 + \log x - \tan x$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = y\ [1+\log x - \tan x]$

$= x^x \cos x\,[1+\log x - \tan x]$

9. $y = (\sin x)^{\log x}. \cot \{e^x(a+bx)\}$

$\therefore \log y = \log x.\log(\sin x) + \log \cot \{e^x(a+bx)\}$

$$\therefore \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log x \quad \frac{\cos x}{\sin x} + \log(\sin x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$+ \frac{-1.\ \mathrm{cosec}^2\{e^x(a+bx)\}}{\cot\{e^x(a+bx)\}} \{e^x.b + (a+bx)e^x\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\log x}. \cot\{e^x(a+bx)\} \times$$

$$\left[\frac{1}{x}\log \sin x + \cot x \log x - \frac{1.}{\sin^2\{e^x(a+bx)\}} \frac{\sin e^x(a+bx)}{\cos\{e^x(a+bx)\}}\right]$$

$$= (\sin x)^{\log x} \cot\{e^x(a+bx)\} \left[\frac{1}{x}\log \sin x + \cot x \log x\right.$$

$$\left. - \frac{2}{2\sin\{e^x(a+bx)\cos\{e^x(a+bx)\}}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\log x}. \cot\{e^x(a+bx)\} \left[\frac{1}{x}\log \sin x + \cot x.\log x\right.$$

$$\left. - 2\,\mathrm{cosec}^2\{e^x(a+bx)\}\right]$$

10. $x = \frac{1}{2}\,(t+t^{-1}),\ y = \frac{1}{2}\,(t-t^{-1})$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಎಷ್ಟು?

ಈಗ, $\dfrac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\,(1-t^{-2}),\ \dfrac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\,(1+t^{-2})$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{1.2}{2}\ \frac{(1+t^{-2})}{(1-t^{-2})}$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{t^2}}{1-\dfrac{1}{t^2}} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$

11. $x = a\tan\theta,\ y = \dfrac{1}{2}\ a\sin 2\theta$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\dfrac{dx}{d\theta} = a\sec^2\theta$

ಮತ್ತು $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{1}{2}\ a\ (2\cos 2\theta)$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos 2\theta}{a\sec^2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos^2\theta$$

$$= \cos^4\theta - (\sin\theta\cos\theta)^2$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{dy}{dx} = \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta$

12. $x = 2\sin t$, $y = \cos 2t$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$, $\frac{dy}{dt} = -2\sin 2t = -2\,(2\sin t\cos t)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin t\cos t}{2\cos t}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx} = -2\sin t$

13. $x = a\cos^4 t$, $y = b\sin^4 t$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\frac{dx}{dt} = -4a\cos^3 t.\sin t$, $\frac{dy}{dt} = 4b\sin^3 t\cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4b\sin^3 t\cos t}{-4a\cos^3 t\sin t} = \frac{-b\sin^2 t}{a\cos^2 t}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\tan^2 t$

14. $x = a\tan\theta$, $y = a\sin^2\theta$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\frac{dx}{d\theta} = a\sec^2\theta$ ಮತ್ತು $\frac{dy}{d\theta} = 2a\sin\theta\cos\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2a\sin\theta\cos\theta}{a\sec^2\theta} = 2\sin\theta\cos^3\theta$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx} = 2\sin\theta\cos^3\theta$

15. $\sqrt{x+1}$ ನ್ನು x^2 ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

ಈಗ, $y = \sqrt{x+1}$ ಮತ್ತು $z = x^2$ ಇರಲಿ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \text{ ಮತ್ತು } \frac{dz}{dx} = 2x$$

ಈಗ ನಾವು $\frac{dy}{dz}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2x}$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{4x\sqrt{x+1}}$

16. $\cos x$ ನ್ನು x^3 ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

ಈಗ, $y = \cos x$, $z = x^3$ ಇರಲಿ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sin x \text{ ಮತ್ತು } \frac{dz}{dx} = 3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$$

$$= -\sin x / 3x^2$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dz} = -\frac{\sin x}{3x^2}$

17. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\tan^{-1} x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

ಈಗ, $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$, $z = \tan^{-1} x$ ಇರಲಿ.

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

ಆಗ $y = \tan^{-1} \dfrac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1} \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

i.e., $y = \dfrac{1}{2}\tan^{-1} x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

ಈಗ ನಾವು $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$$

$$= \frac{1.(1+x^2)}{2(1+x^2)}$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.8

A. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$

2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + C = 0$

4. $x(1+y)^{½} + y(1+x)^{½} = 0$ ಆದರೆ $\frac{dx}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $y^3 + x^3 = a^3$

6. $x^n + y^n = a^n$

7. $e^y = xy$

8. $x^y + y^x = 1$

9. $x^y . y^x = 1$

10. $\log xy = x^2 + y^2$

11. $x^5 + x^4y + y^3 = 0$

12. $x^3 + y^3 = 3axy$

13. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

14. $a\cos mx + b\sin my = 0$

15. $x^2 + y^2 = x^2y^2$

16. $x\sin y + y\sin x = 0$

17. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

18. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

19. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = a$

20. $x^y = y^x$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\,(y - x\log_e y)}{x\,(x - y\log_e x)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

B. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $(x^x)^x$
2. $x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$
3. $x^{\left(x^x\right)}$
4. $(\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}$
5. $x^{(\log x)\log(\log x)}$
6. $x^y = e^{x-y}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log x}{(1+\log x)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
7. $\dfrac{x}{x-y} = \log\dfrac{a}{x-y}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx} = 2 - \dfrac{x}{y}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
8. e^{e^x}
9. e^{x^x}
10. x^{e^x}
11. $x^x + x^{\frac{1}{x}}$
12. $(\cos x)^{\cot^2 x}$
13. $(\cot^{-1}x)^{\frac{1}{x}}$
14. $(\cos x)^y = (\sin y)^x$
15. $y = x^y$
16. $y = x^{y^x}$
17. $y = x^{x^{x^{\cdots\infty}}}$ ಆದರೆ $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1 - y\log x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
18. $y = \cos(x^x)$

19. $(x^2+a^2)^x$

20. $2^x + 2^{-x}$

C. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $x = a\sin t,\ y = a\cos t$

2. $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$

3. $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ at $t = \frac{\pi}{6}$

4. $x = a(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}),\quad y = a\sin t$

5. $x = a(t - \sin t),\qquad y = a(1 - \cos t)$

6. $x = 3\cos t - 2\cos^3 t,\quad y = 3\sin t - 2\sin^3 t$

7. $x = a\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2+1}}\quad y = at\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2+1}}$

8. $x = \frac{2at^2}{1+t^2},\ y = \frac{2at^3}{1+t^2}$

9. $x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\ y = \frac{2bt}{1+t^2}$

10. $x = at^2,\qquad y = 2at$

11. $x = ct,\quad y = \frac{c}{t}$

12. $x = \left(t + \frac{1}{t}\right),\ y = \frac{1}{t}$

13. $x = \log\sin\theta,\ y = \log\cos\theta$

14. $x = 3\cosh t,\ y = 3\sinh t$

15. $x = e^{\sin 3t},\ y = e^{\cos 3t}$

16. $x = a\cosh^2 t,\ y = b\sinh^2 t$

17. $x = \cos(\log t)$, $y = \log(\cos t)$

18. $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$

D. ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಇನ್ನೊಂದರ ನಿಷ್ಪನ್ನ

1. $\log_{10}x$ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x^2 ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $(x^2+ax+a^2)^n . \log\cot\frac{x}{2}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\tan^{-1}(a\cos bx)$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sqrt{1-x^4}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sqrt{1-x^2}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^{\sin^{-1}x}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin^{-1}x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x^n \log^{\tan^{-1}x}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\frac{\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $(\log x)^{\tan x}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin(m\cos^{-1}x)$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\sec^{-1}x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $x\sqrt{x^2-1}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $e^{\tan x}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sin x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $x^{\sin x}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $(\sin x)^x$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\tan^{-1}x$ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11.16 ಅನುಕ್ರಮ ಅನುಕಲನ

y ಎಂಬುದು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಎಂಬುದು x ನ ಇನ್ನೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದ್ದೀವಿ.

$\frac{dy}{dx}$ ಎಂಬುದು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾದ್ದರಿಂದ ಅದು ಅವಕಲ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸಲ ಅದರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು (ಅಥವಾ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕವನ್ನು) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಎರಡನೆಯ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ ಅಥವಾ *ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ*ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ಅಥವಾ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ಅಥವಾ y_2 ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆಯೇ ಇದನ್ನು ಪುನಃ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದರೆ, *ಮೂರನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ* (ಅಥವಾ ಮೂರನೆಯ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\frac{d^3y}{dx^3}$ ಅಥವಾ y_3 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ:

$y = x^6 + 7x^5 - 5$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore\ y_1 \equiv \frac{dy}{dx} = 6x^5 + 7.5x^4 = 6x^5 + 35x^4$$

$$y_2 \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = 6.5\,x^4 + 7.5.4.x^3$$

$$= 30x^4 + 140x^3$$

$$y_3 \equiv \frac{d^3y}{dx^3} = 30.4.x^3 + 140.3\,x^2$$

$$= 120x^3 + 420x^2$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = x\sin x$ ಆದರೆ y_1, y_2, y_3 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y_1 = x\cos x + \sin x$

$y_2 = -x\sin x + \cos x + \cos x$

i.e., $y_2 = -x\sin x + 2\cos x$

$y_3 = -x\cos x - \sin x - 2\sin x$

$= -x\cos x - 3\sin x$

2. $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ ಆದರೆ $y_2 = m^2y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $y_1 = m.(Ae^{mx} - Be^{-mx})$

$\therefore y_2 = m^2(Ae^{mx} + Be^{-mx})$

ಅಥವಾ $y_2 = m^2y$

3. $y = A(x+\sqrt{x^2-1})^n + B(x-\sqrt{x^2-1})^n$ ಆದರೆ $(x^2-1)y_2 + xy_1 - n^2y = 0$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y_1 = An(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}\left[1+\frac{1.2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$+ Bn(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\left[1-\frac{1.2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$= An(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}\left[\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$+Bn(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\left[\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\right]$$

ಅಥವಾ $y_1\sqrt{x^2-1} = A.n.(x+\sqrt{x^2-1})^n + Bn(x-\sqrt{x^2-1})^n = n.[y]$

ಅಥವಾ $y_1\sqrt{x^2-1} = ny$

$$\therefore\ y_2\sqrt{x^2-1} + y_1\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = ny_1$$

$\sqrt{x^2-1}$ ನಿಂದ ಎರಡು ಕಡೆಗೂ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$y_2(x^2-1) + xy_1 = ny_1\sqrt{x^2-1}$

ಅಥವಾ $y_2(x^2-1) + xy_1 = n.ny$ [ಏಕೆಂದರೆ $y_1\sqrt{x^2-1} = ny$]

$\therefore (x^2-1)y_2 + xy_1 - n^2y = 0$

4. $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ ಆದರೆ

$(1-x^2)y_2 = xy_1 - m^2y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y_1 = \cos(m\sin^{-1}x)\ \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

ಈಗ, $\sqrt{1-x^2}$ ನಿಂದ ಎರಡು ಕಡೆಗೂ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$y_1\sqrt{1-x^2} = m\cos(m\sin^{-1}x)$$

$$\therefore\ y_2\ \sqrt{1-x^2} + \frac{y_1(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\ m\sin(m\sin^{-1}x)\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

ಅಥವಾ $y_2(1-x^2) - xy_1 = -m^2y$

[ಏಕೆಂದರೆ $\sin(m\sin^{-1}x) = y$]

$\therefore\ (1-x^2)\ y_2 = xy_1 - m^2y$

5. $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ಆದರೆ $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y_1 = -\frac{a}{x}\sin(\log x) + \frac{b}{x}\cos(\log x)$$

ಈಗ, x ನಿಂದ ಎರಡು ಕಡೆಗೂ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$$

$$\therefore\ xy_2 + y_1 = \frac{-a}{x}\cos(\log x) - \frac{-b}{x}\sin(\log x)$$

ಅಥವಾ $x^2y_2 + xy_1 = -[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]$

$= -y$

$\therefore\ x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

6. $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ ಆದರೆ

$x^2y_2 + xy_1 + n^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$

$$\left[\therefore \ \frac{y}{b} = \cos \ \log\left(\frac{x}{n}\right)^n\right]$$

ಅಥವಾ $y = b\cos \ n\left[\log\left(\frac{x}{n}\right)\right]$

$$\therefore \ y_1 = -b\sin\left[n\log\frac{x}{n}\right]\cdot\left[\frac{n}{\left(\frac{x}{n}\right)}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

ಅಥವಾ $xy_1 = -nb\sin\left[n\log\frac{x}{n}\right]$

ಮತ್ತೊಂದು ಸಲ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ

$$xy_2 + y_1 = -nb\cos\left[n\log\frac{x}{n}\right]\frac{n}{\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

ಅಥವಾ $x^2y_2 + xy_1 = -n^2b\cos\left[n\ \log\ \frac{x}{n}\right]$

ಅಥವಾ $x^2y_2 + xy_1 = -n^2y$

ಅಥವಾ $x^2y_2 + xy_1 + n^2y = 0$

7. $y = e^{m\sin^{-1}x}$ ಆದರೆ $(1-x^2)\,y_2 - xy_1 = m^2y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $y_1 = e^{m\sin^{-1}x}\ \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$

ಅಥವಾ $y_1\sqrt{1-x^2} = my$ ..... (1)

$$\therefore \ y_2\sqrt{1-x^2} + \frac{y_1(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = my_1$$

ಅಥವಾ $y_2(1-x^2) - xy_1 = my_1\sqrt{1-x^2} = m.\ my$

[(1) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $y_1\sqrt{1-x^2} = my$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದೆ]

$\therefore \ y_2(1-x^2) - xy_1 = m^2y$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.9

1. $y = \frac{\log x}{x}$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\log x - 3}{x^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $y = x + \tan x$ ಆದರೆ $\cos^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + 2x = 2y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $x = \sin t,\ y = \sin pt$ ಆದರೆ $(1-x^2)\, y_2 - xy_1 + p^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $y^3 - 3ax^2 + x^3 = 0$ ಆದರೆ
$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $ay = \sin(x+y)$ ಆದರೆ
$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $y = (\sin^{-1}x)^2$ ಆದರೆ
$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $x = a\cos nt + b\sin nt$ ಆದರೆ
$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $y = (x^2+a^2)^6$ ಆದರೆ
$(x^2+a^2)\, y_2 - 10xy_1 = 12y$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. $y = \sin(m\tan^{-1}x)$ ಆದರೆ
$(1+x^2)^2\, y_2 + 2x(1+x^2)y_1 + m^2y = 0$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $x = ½\,(t+t^{-1}),\ y = ½\,(t-t^{-1})$
ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $x = a \tan\theta,\ y = \frac{1}{2} a \sin 2\theta$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $y = \frac{1}{2}\ (\tan^{-1}x)^2$ ಆದರೆ

$(1+x^2)^2\ y_2 + 2x\ (1+x^2)\ y_1 = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $y = \log [x+ \sqrt{1+x^2}]$ ಆದರೆ

$(1+x^2)\ \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $x = a\ (\cos\theta + \theta\sin\theta)$

$y = a\ (\sin\theta - \theta\cos\theta)$ ಆದರೆ

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $y = \sin\ (\sin x)$ ಆದರೆ

$\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x.\ \frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $y = (x^2-1)^n$ ಆದರೆ

$(x^2-1)\ y_2 - (n-1)\ 2xy_1 - 2ny = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. $y = e^{a\sin^{-1}x}$ ಆದರೆ $(1-x^2)\ y_2 - xy_1 - a^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

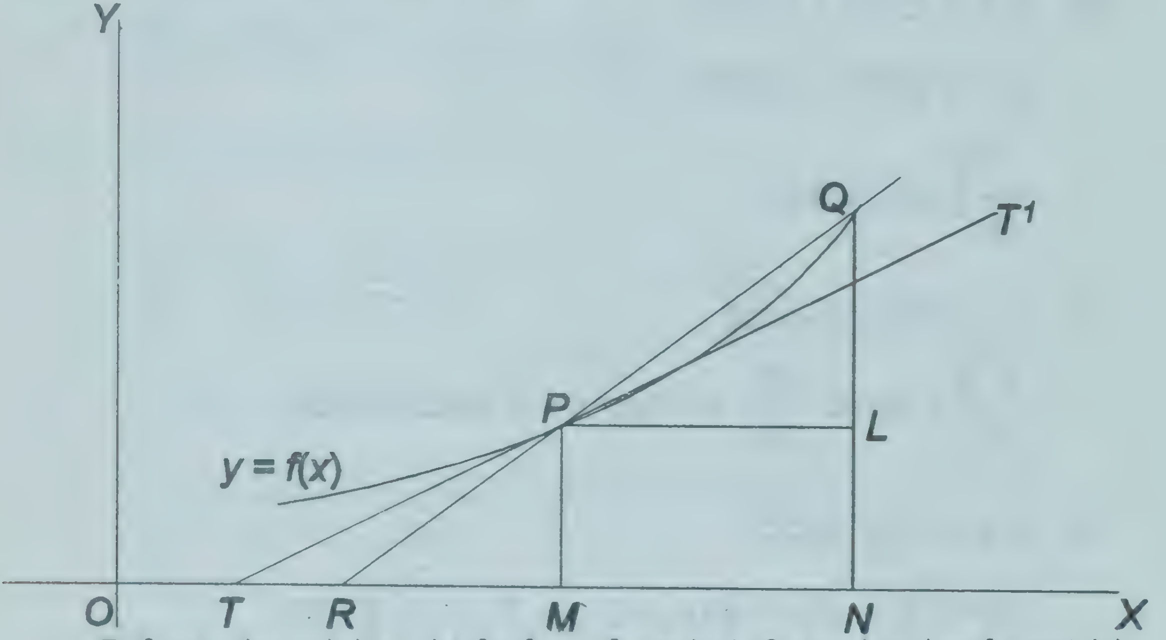
18. $y = e^{m\cos^{-1}x}$ ಆದರೆ $(1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 12

ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಅನ್ವಯಗಳು

12.1 ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕದ ರೇಖಾಗಣಿತರೀತ್ಯಾ ಅರ್ಥಕಲ್ಪನೆ

$f(x)$ ಎಂಬುದು x ನ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ ಇರಲಿ. $y= f(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರಲಿ. $P(x,y)$ ಎಂಬುದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.1)



P ಗೆ ಅತಿ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ Q ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(x+ \delta x,\ y+ \delta y)$ಇರಲಿ. Q ಬಿಂದುವು Pಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ δx ಮತ್ತು δy ಗಳೆರಡೂ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತವೆ. Q ಬಿಂದುವು P ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ, QPR ಜ್ಯಾವು TPT' ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ Q\hat{P}L \to T'\hat{P}L = \psi$$

ಅಥವಾ ψ ಎನ್ನುವುದು Q ಬಿಂದುವು P ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ $Q\hat{P}L$ ಕೋನದ ಮಿತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ \psi = \lim_{Q \to P} \angle QPL \qquad \therefore \tan\psi = \lim_{Q \to P} \tan Q\hat{P}L$$

$$\therefore\ \tan\ \psi = \lim_{Q \to P} \frac{QL}{PL} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$Q \to P$ ಆದಾಗ $N \to M, \quad \delta x \to 0$

$$\therefore \boxed{\tan\psi = \frac{dy}{dx}}$$

ಯಾವುದಾದರೂ ರೇಖೆಯು x– ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ θ ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ $\tan\theta$ ಎನ್ನುವುದು ಆ ರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ P ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕವು OX ಜೊತೆ ψ ಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\tan\psi$ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $y = f(x)$ ಎಂಬ ವಕ್ರ ರೇಖೆಗೆ $\frac{dy}{dx} = \tan\psi$ ಎಂಬುದು $P(x,y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟ. ಇದು $\frac{dy}{dx}$ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ರೇಖಾಗಣಿತ ರೀತ್ಯಾ ಅರ್ಥಕಲ್ಪನೆ.

ಸೂಚನೆ:

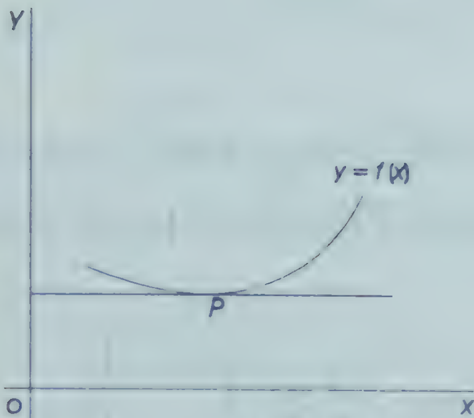
(1) $\frac{dy}{dx} = 0$ ಆದರೆ $\tan\psi = 0 \therefore \psi = 0$

ಅಂದರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವು x– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 12.2).

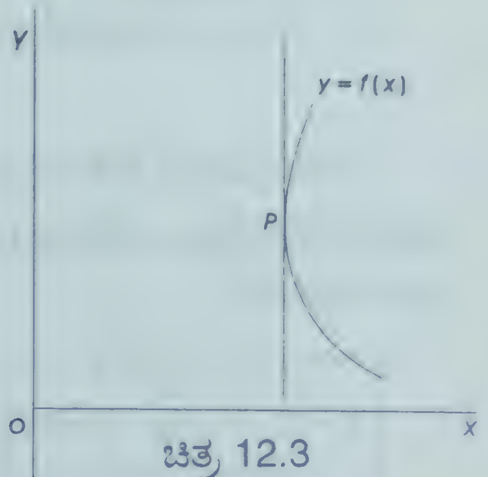
ಅಂದರೆ, $y = f(x)$ ಎಂಬ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕವು x– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಷರತ್ತು $\frac{dy}{dx} = 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

(2) $\frac{dy}{dx} \to \infty$ ಆದರೆ $\tan\psi \to \infty \therefore \psi = \frac{\pi}{2}$

ಅಂದರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವು x– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು. ಅಥವಾ y–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು. (ಚಿತ್ರ 12.3).

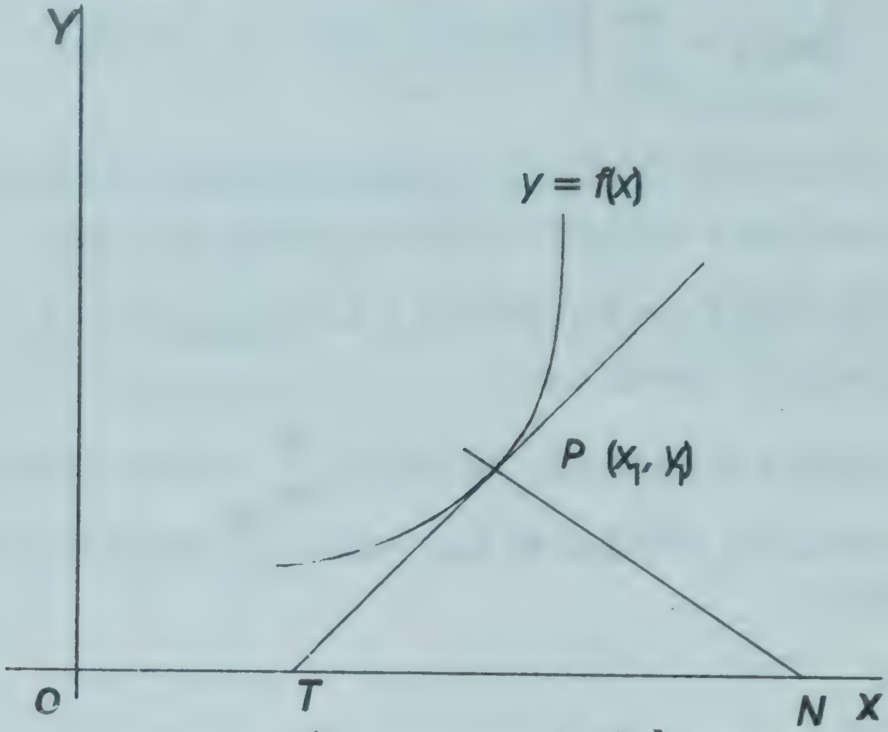


ಚಿತ್ರ 12.2



ಚಿತ್ರ 12.3

12.2 ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು



$P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು $P(x_1, y_1)$ನಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆ ಸೂಚಿಸುವುದು; ಮತ್ತು ಇದು (x_1, y_1) ನಲ್ಲಿ $y = f(x)$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು m ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$m = \left(\frac{dy}{dy}\right)_{(x_1, y_1)}$$

$P(x_1, y_1)$ ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕದ (ಚಿತ್ರ 12.4) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad \left[\text{ಇಲ್ಲಿ } m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}\right]$$

P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದನ್ನು ಲಂಬರೇಖೆ (ನಾರ್ಮಲ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $P(x_1, y_1)$ ನಲ್ಲಿನ ಲಂಬರೇಖೆ PN ನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು

$$\boxed{y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)} \qquad \left[\text{ಇಲ್ಲಿ } m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}\right]$$

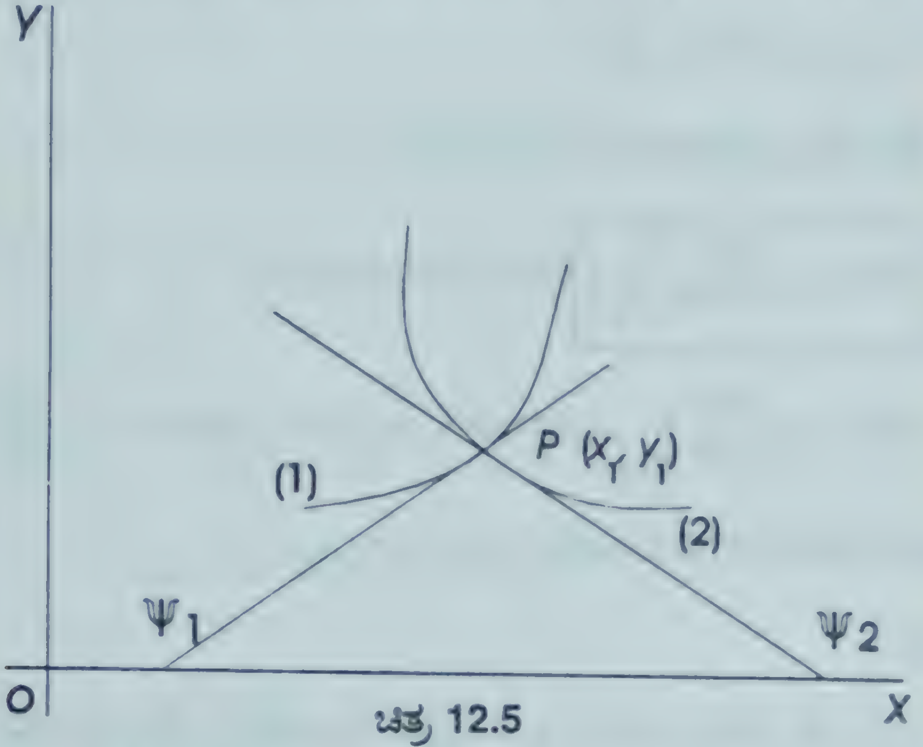
12.3 ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ

ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನ ಎನ್ನುವರು.

$$y = f(x) \qquad \text{..... (1)}$$

$$y = g(x) \qquad \text{..... (2)}$$

ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು $P(x_1, y_1)$ ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. P ನಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿವೆ ಮತ್ತು ಇವು x–ಅಕ್ಷದ ಜೊತೆ ψ_1 ಮತ್ತು ψ_2 ಕೋನ ಏರ್ಪಡಿಸಿವೆ. ಈ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಇರಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.5).



ಚಿತ್ರ 12.5

P ನಲ್ಲಿ (1) ನೇ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \tan \psi_1 = m_1$$

ಹಾಗೂ P ನಲ್ಲಿ (2) ನೇ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \tan \psi_2 = m_2$$

ಚಿತ್ರ 12.5 ರಿಂದ $\psi_2 = \theta + \psi_1$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

$\therefore \theta = \psi_1 - \psi_2$

$\therefore \tan\theta = \tan(\psi_1 - \psi_2)$

$$= \frac{\tan\psi_1 - \tan\psi_2}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

ಸೂತ್ರದಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಈಗ, θವು *ಲಘುಕೋನ* ವಾಗಿರಬೇಕಾದಲ್ಲಿ

$$\boxed{\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|}$$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ, $m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}$ ಮೊದಲನೆಯ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಹಾಗೂ $m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}$ ಎರಡನೆಯ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಓಟಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸೂಚನೆ:

(1) $m_1 = m_2$ ಆದರೆ, $\tan\theta = 0 \therefore \theta = 0$; ಅಂದರೆ, $P(x_1,y_1)$ ನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೂ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಆಗ, ಆ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

(2) $m_1 m_2 = -1$ ಆದರೆ $\tan\theta \to \infty$ ಅಂದರೆ $\theta = \frac{\pi}{2}$

P ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಬೇಕಾದರೆ $m_1 m_2 = -1$ ಆಗುವುದು ಅಗತ್ಯ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳೂ *ಲಂಬಾತ್ಮಕ* (ಆರ್ಥಾಗನಲ್) ವಾಗಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ ನಿಯಮ

$$\boxed{m_1 m_2 = -1}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = 5+x - \frac{x^2}{8}$ ಎನ್ನುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ (2,4)ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $y = 5+x - \frac{x^2}{8}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x}{4}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,4)} = 1 - ½ = - ½$$

ಅಂದರೆ, $\tan \psi = ½$

$\therefore \psi = \tan^{-1} ½$

2. $y = x^3 + 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ (1,2) ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $y = x^3 + 1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)} = 3.1^2 = 3$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - 2 = 3\,(x - 1)$$

3. $x^2 + y^2 = a^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ (x_1, y_1)ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $x^2 + y^2 = a^2$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದರೆ

$$2x+2y\frac{dy}{dx} = 0 \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \frac{-x_1}{y_1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = -\left(\frac{x_1}{y_1}\right)(x - x_1)$$

ಅಥವಾ $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$

ಅಥವಾ $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$

ಆದರೆ, (x_1, y_1) ಎನ್ನುವುದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಾದ್ದರಿಂದ $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$xx_1 + yy_1 = a^2$

4. $\left.\begin{array}{l} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{array}\right\}$ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ 't' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಈಗ, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cosh t}{a\sinh t}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ :

$$y - b\sinh t = \frac{b\cosh t}{a\sinh t}(x - a\cosh t)$$

ಅಥವಾ $(b\cosh t)\,x - (a\sinh t)\,y = ab(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = ab$

ಅಂದರೆ, $(b\cosh t)\,x - (a\sinh t)\,y = ab$

ಇದುಬೇಕಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ.

5. $\frac{y}{a} = \log\sec\frac{x}{a}$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{a}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sec\frac{x}{a}}\sec\frac{x}{a}\tan\frac{x}{a}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan\frac{x}{a} \quad \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \tan\frac{x_1}{a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ :

$$y - y_1 = \tan\left(\frac{x_1}{a}\right)(x - x_1)$$

ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ :

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left(\tan\frac{x_1}{a}\right)}(x - x_1)$$

ಅಥವಾ $(y-y_1) \tan \frac{x_1}{a} + (x-x_1) = 0$

6. $y = be^{\frac{-x}{a}}$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯು y–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ :

$$y = be^{\frac{-x}{a}} \qquad \text{..... (1)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{be^{\frac{-x}{a}}}{a}$$

ಈಗ, ವಕ್ರರೇಖೆ (1) y–ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0,b)$ ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,b)} = \frac{-b}{a}$$

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{.... (2)}$$

ಇದನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\frac{dy}{dx} = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆ (2) ರ ಓಟ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$$

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳೂ $(0,b)$ ನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಓಟವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳೂ $(0,b)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳು $(0, b)$ ನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

7. $y=x^3-3x^2+7$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ?

$$y = x^3 - 3x^2 + 7 \qquad \text{.... (1)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಷರತ್ತು $\frac{dy}{dx} = 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

$\therefore 3x^2 - 6x = 0$ ಅಥವಾ $3x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0, x = 2.$

ಇವು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಈಗ y-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಬೇಕು. $x = 0$ ಆದಾಗ, $y = (0)^3 - 3(0) + 7 \quad \therefore y = 7$

$x = 2$ ಆದಾಗ, $y = (2)^3 - 3(2)^2 + 7 = 3$

ಅಂದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಂದುಗಳು (0,7) ಮತ್ತು (2,3) ಎಂದಾಯಿತು.

8. $\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು

$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ

$\rho^n = (a\cos\theta)^n + (b\sin\theta)^n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{n}{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}-1}\frac{1}{a} + \frac{n}{n-1}\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}-1}\frac{1}{b}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}}{a\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}}$$

(x,y) ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಬರೆದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು

$$Y - y = -\frac{b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{a\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}}(X - x)$$

ಅಥವಾ $\frac{Y-y}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{-1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}(X - x)$

$$Y.\frac{1}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}-\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}}=-\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}X+\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

ಅಥವಾ $$X.\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}+Y\frac{1}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1 \quad \text{.... (1)}$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು X ಮತ್ತು Y ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

$$X\cos\theta + Y\sin\theta = p \quad \text{... (2)}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಒಂದೇ ರೇಖೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ.

$$\therefore \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\sin\theta}=\frac{1}{p}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\frac{a\cos\theta}{p} \quad \text{.... (3)}$$

ಮತ್ತು $$\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\frac{b\sin\theta}{p}$$

ಆದರೆ, (x,y) ಬಿಂದುವು ದತ್ತ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ

$$\therefore \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1$$

ಅಥವಾ $$\left(\frac{a\cos\theta}{p}\right)^{n}+\left(\frac{b\sin\theta}{p}\right)^{n}=1$$ (3ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

ಅಥವಾ $(a\cos\theta)^n + (b\sin\theta)^n = p^n$

ಇದೇ ಬೇಕಾದ ಷರತ್ತು.

9. $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ ರೇಖೆಯು

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1$$

ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬೇಕಾದರೆ ಇರುವ ಷರತ್ತನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{mx^{m-1}}{a^m} + \frac{my^{m-1}}{b^m}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-b^m}{a^m}\frac{x^{m-1}}{y^{m-1}}$$

ಈಗ, (x_1,y_1) ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಾದರೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು

$$y - y_1 = -\frac{b^m}{a^m}\left(\frac{x_1^{m-1}}{y_1^{m-1}}\right)(x - x_1)$$

ಅಥವಾ $$\frac{yy_1^{m-1} - y_1^m}{b^m} = -\frac{xx_1.^{m-1} - x_1^m}{a^m}$$

ಅಥವಾ $$\frac{xx_1^{m-1}}{a^m} + \frac{yy_1^{m-1}}{b^m} = \frac{x_1^m}{a^m} + \frac{y_1^m}{b^m} = 1 \quad \text{.... (i)}$$

[ಏಕೆಂದರೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ]

ಈಗ, (i) ಮತ್ತು $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \frac{\left(\frac{x_1^{m-1}}{a^m}\right)}{\cos\theta} = \frac{\left(\frac{y_1^{m-1}}{b^m}\right)}{\sin\theta} = \frac{1}{p}$$

$$\therefore x_1^{m-1} = \frac{a^m\cos\theta}{p}, \quad y_1^{m-1} = \frac{b^m\sin\theta}{p}$$

$$x_1 = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}(\cos\theta)^{\frac{1}{m-1}}}{p^{\frac{1}{m-1}}}, \quad y_1 = \frac{b^{\frac{m}{m-1}}(\sin\theta)^{\frac{1}{m-1}}}{p^{\frac{1}{m-1}}}$$

ಆದರೆ (x_1,y_1) ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{x_1^m}{a^m} + \frac{y_1^m}{b^m} = 1$$

x_1,y_1 ಗಳಿಗೆ ಮೇಲೆ ಬಂದಿರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ

$$\frac{a^{\frac{m^2}{m-1}-m}(\cos\theta)^{\frac{m}{m-1}}}{p^{\frac{m}{m-1}}} + \frac{b^{\frac{m^2}{m-1}-m}(\sin\theta)^{\frac{m}{m-1}}}{p^{\frac{m}{m-1}}} = 1$$

ಅಥವಾ $a^{\frac{m}{m-1}} (\cos\theta)^{\frac{m}{m-1}} + b^{\frac{m}{m-1}} (\sin\theta)^{\frac{m}{m-1}} = p^{\frac{m}{m-1}}$

ಅಥವಾ $(a\cos\theta)^{\frac{m}{m-1}} + (b\sin\theta)^{\frac{m}{m-1}} = p^{\frac{m}{m-1}}$

ಇದೇ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದ್ದ ಷರತ್ತು.

10. $y^2 = ax$ ಮತ್ತು $x^3 + y^3 = 3axy$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ (ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಹೊರತಾಗಿ) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ xನ್ನು ವಿಲೋಪ (ಎಲಿಮಿನೇಟ್) ಮಾಡಬೇಕು.

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $x = \frac{y^2}{a}$

ಇದನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\left(\frac{y^2}{a}\right)^3 + y^3 = 3a\frac{y^2}{a}y$$

$$y^3\left(\frac{y^3}{a^3} + 1 - 3\right) = 0$$

$$y^3\left(\frac{y^3}{a^3} - 2\right) = 0$$

$$\therefore\ y = 0,\ 2^{\frac{1}{3}} a$$

$$\therefore\ x = 0 \text{ ಮತ್ತು } x = \frac{2^{\frac{2}{3}}a^2}{a} = 2^{\frac{2}{3}} a$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು (0,0) ಮತ್ತು $(2^{\frac{2}{3}} a, 2^{\frac{1}{3}}a)$ ಆಗಿವೆ. ಈಗ, ಎರಡನೆಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$y^2 = ax$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$2y\frac{dy}{dx} = a \quad \therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$$

ಈಗ, $(2^{\frac{2}{3}} a, 2^{\frac{1}{3}}a)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2.2^{\frac{1}{3}}a} = 2^{\frac{-4}{3}} = (2^4)^{\frac{-1}{3}} = (16)^{\frac{-1}{3}}$$

$$\therefore \theta_1 = \tan^{-1}(16)^{\frac{-1}{3}}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $x^3 + y^3 = 3axy$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left[y + x\frac{dy}{dx}\right]$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}(y^2 - ax) = ay - x^2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

ಈಗ ಛೇದನ ಬಿಂದು $\left(2^{\frac{2}{3}}a, 2^{\frac{1}{3}}a\right)$ ನಲ್ಲಿ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a.2^{\frac{1}{3}}a - 2^{\frac{4}{3}}a^2}{2^{\frac{2}{3}}a^2 - a.2^{\frac{2}{3}}a} = \frac{2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}} \to -\infty$$

$$\therefore \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆದ ಕೋನ $= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(16)^{\frac{1}{3}}$

11. $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $x^2 = 4by$ ಈ ಎರಡು ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾಗಳ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಲ್ಲದ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ y ಯನ್ನು ವಿಲೋಪಿಸೋಣ.

2 ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $y = \frac{x^2}{4b}$

ಇದನ್ನು 1 ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\left(\frac{x^2}{4b}\right)^2 = 4ax$$

ಅಥವಾ $\frac{x^4}{16b^2} = 4ax$

ಅಥವಾ $x^4 = 64\, ab^2 x$

ಅಥವಾ $x(x^3 - 64ab^2) = 0$

$\therefore\ x = 0$ ಮತ್ತು $x = 4\, a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}$

$\therefore\ y = 0$ ಮತ್ತು $y = \dfrac{16\, a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{4}{3}}}{4b} = 4a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು (0,0) ಮತ್ತು $\left(4a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{2}{3}},\, 4a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}\right)$

ಈಗ, $y^2 = 4ax$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$2y\, \frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(4a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{2}{3}},\, 4a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{2a}{4a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}}}{2b^{\frac{1}{3}}} = m_1 \text{ ಇರಲಿ}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $x^2 = 4by$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$2x = 4b\, \frac{dy}{dx} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2b}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{4a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}}{2b} = \frac{2a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = m_2 \text{ ಇರಲಿ}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{2b^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{2a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}}{1 + \dfrac{2a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}}}{2b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}}$$

$$= \frac{\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - 4a^{\frac{1}{3}}}{2b^{\frac{1}{3}}}}{\dfrac{b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}} = \frac{-3a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{2\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)}$$

12. $ax^2 + by^2 = 1$ ಮತ್ತು $lx^2 + my^2 = 1$ ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಬೇಕಾದರೆ $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{m}$ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು (x_1, y_1) ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ

$$ax_1^2 + by_1^2 = 1$$

$$lx_1^2 + my_1^2 = 1$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$x_1^2 = \frac{m-b}{am-bl} \text{ ಮತ್ತು } y_1^2 = \frac{a-l}{am-bl}$$

ಈಗ $ax^2 + by^2 = 1$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದರೆ

$$2ax + 2by\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-ax}{by}$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \frac{-ax_1}{by_1} = m_1 \text{ ಇರಲಿ}$$

ಇದೇ ರೀತಿ 2 ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-lx}{my}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{-lx_1}{my_1} = m_2$$ ಇರಲಿ

ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ $m_1 m_2 = -1$

ಅಂದರೆ, $\left(\frac{-ax_1}{by_1}\right) \cdot \left(\frac{-lx_1}{my_1}\right) = -1$

ಅಥವಾ $alx_1^2 + bmy_1^2 = 0$

ಈಗ, x_1^2 ಮತ್ತು y_1^2 ಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$al\,\frac{(m-b)}{am-bl} + bm\,\frac{(a-l)}{am-bl} = 0$$

$$\therefore alm - abl + abm - blm = 0$$

ಇದನ್ನು $ablm$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{m} + \frac{1}{l} - \frac{1}{a} = 0$$

ಅಥವಾ

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{l} - \frac{1}{m}$$

13. $xy + 3x = 1$ ಮತ್ತು $y^2 + x + 5y + 5 = 0$ ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು (1,–2) ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, (1,–2) ಎನ್ನುವುದು ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣ $xy + 3x = 1$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$x\frac{dy}{dx} + y + 3 = 0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3-y}{x}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2)} = \frac{-3+2}{1} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \therefore m_1 = -1$$

ಹಾಗೇಯೇ $y^2 + x + 5y + 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$2y\frac{dy}{dx} + 1 + 5\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{ಅಥವಾ} \quad \frac{dy}{dx}(2y+5) = -1$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-1}{2y+5} \text{ ಅಥವಾ} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2)} = -\frac{1}{2(-2)+5} = -1$$

ಈಗ, $m_1 = m_2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳೂ (1,–2) ನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

$y + 2 = (-1)(x-1)$

ಅಥವಾ $y + 2 = -x + 1$

ಅಥವಾ $x + y + 1 = 0$

14. $x - 4y + 3 = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ $y = 6-x^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = 6-x^2$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

$\therefore$ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಓಟ $= \frac{1}{2x_1}$ [(x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ]

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಯ ಓಟ $= \frac{1}{4}$

ಲಂಬರೇಖೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗೆ || ಆಗಿದೆ $\therefore m_1 = m_2$

$$\therefore \frac{1}{2x_1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x_1 = 2$$

y – ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವಕ್ರರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x_1=2 ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$y_1 = 6-x_1^2 = 6-2^2 = 2$$

ಆದ್ದರಿಂದ (2, 2) ಎನ್ನುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖೆ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore y - 2 = \frac{1}{4}(x-2) \text{ ಅಥವಾ } x-4y-6 = 0$$

ಎಂಬುದು ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 12.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ (x,y) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $y^2 = 4ax$

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(iii) $xy = K$

(iv) $e^y = \sin x$

(v) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ (9,4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

(ii) $3x^2 - xy + 2y^2 = 31$ (1,4) ರಲ್ಲಿ

(iii) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ (2,–1) ರಲ್ಲಿ

(iv) $y = \sin 2x$ $x = \frac{\pi}{6}$ ರಲ್ಲಿ

(v) $y = x^2$ (2,8) ರಲ್ಲಿ

3. $4x - 2y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ $y = 6x - x^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x + 2y = 6$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ, $y = 3x^2 - 4x$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಭಾಗವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದು a ಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

[ಸೂಚನೆ: ($a\cos^3\theta$, $a\sin^3\theta$) ಎನ್ನುವುದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ].

6. $y^2 = 4ax$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾಗೆ (at^2, $2at$) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $9x^2 - 4y^2 = 36$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ $\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, 1\right)$ ರಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ?

9. $y = 3x^2 + 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಓಟ 2 ಆದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ, ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $y^2 = 2x$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 = 8$ ವೃತ್ತವು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವ(ಗಳ)ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11 $yx^2 = c_1$ ಮತ್ತು $xy = c_2$ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು (3,4) ರ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಅವು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಕೋನ ಎಷ್ಟು?

12. $ax+hy = 0$ ಎನ್ನುವ ರೇಖೆಯು $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ ಎಲಿಪ್ಸ್‌ನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು $hx + by = 0$ ಎನ್ನುವ ರೇಖೆಯು ಮೇಲಿನ ಎಲಿಪ್ಸ್‌ನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು y –ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $ay = x^2$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ $x^3 + y^3 = 3axy$ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $y^2 = ax$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ, ಮೇಲಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು y–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ 'θ' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) ಎಲಿಪ್ಸ್ $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$

(b) ಸೈಕ್ಲಾಯಿಡ್ $x = a(\theta + \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$

(c) ಎಪಿಸೈಕ್ಲಾಯಿಡ್ $x = A\cos\theta - B\cos\frac{A}{B}\theta$

$$y = A\sin\theta - B\sin\frac{A}{B}\theta$$

15. $ax^2+by^2 = 1$ ಮತ್ತು $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$ ಈ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಬೇಕಾದರೆ ಷರತ್ತು ಏನು?

16. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಎಲ್ಲಿ $x-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ, ಎಲ್ಲಿ $x-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$

(b) $y = \dfrac{x^3 - a^3}{ax}$

(c) $y^3 = x^2(2a - x)$

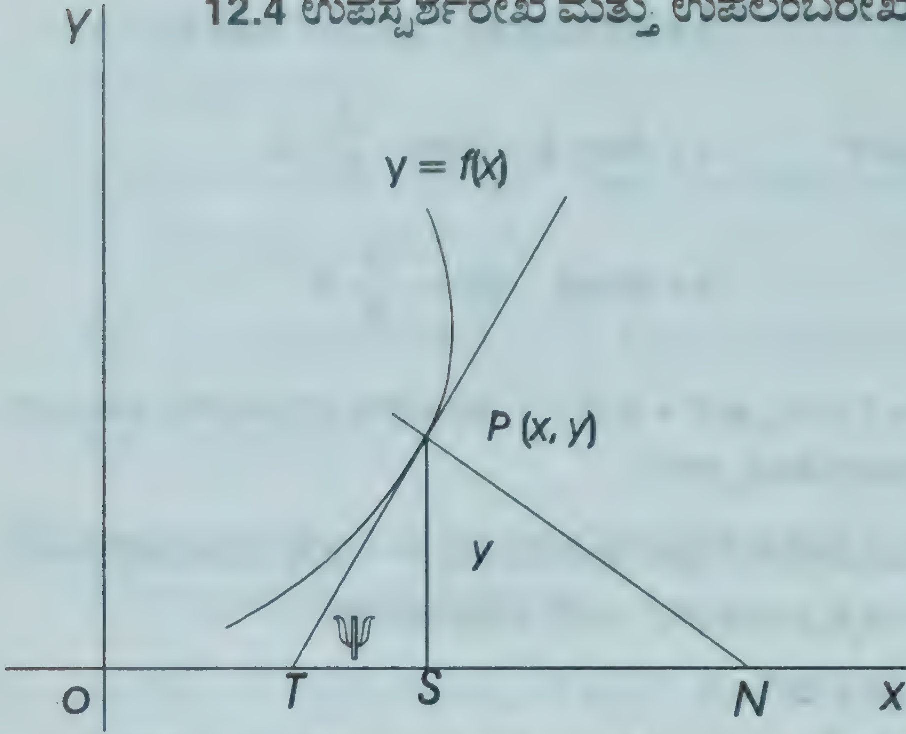
17. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2-y^2 = a^2$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}$

(ii) $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $x^2 = 4by$

(iii) $xy = a^2$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 = 2a^2$

12.4 ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆ



ಚಿತ್ರ 12.6 ರಲ್ಲಿ, $P(x,y)$ ಎಂಬುದು $y = f(x)$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದು. ಈಗ, $PS = y$, PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, ಮತ್ತು TN ಎಂಬುದು ಲಂಬರೇಖೆ, ಕೋನ $PTN = \psi$ ಮತ್ತು

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx}$$

ST **ರೇಖೆಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ (ಸಬ್‌ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್) ಎಂದೂ** ***SN*** **ರೇಖೆಗೆ** ಉಪಲಂಬರೇಖೆ(ಸಬ್‌ನಾರ್ಮಲ್) ಎಂದೂ ಹೆಸರು. ಚಿತ್ರ 12.6 ರಿಂದ ಉಪಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ

$$ST = y \cot \psi = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$$

ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆ

$$SN = y \tan \psi = y.\frac{dy}{dx}$$

ಸೂಚನೆ: ಇದೇ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಲಂಬರೇಖೆ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಲಂಬರೇಖೆ $PN = y \sec \psi = y\sqrt{1 + \tan^2 \psi}$

$$= y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $PT = y \operatorname{cosec} \psi = \dfrac{y\sqrt{1+\tan^2 y}}{\tan \psi}$

$$= \frac{y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}}$$

ಸಾರಾಂಶ:

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $$ST = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ $$SN = y\frac{dy}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ (2,–1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 6 - 2\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{dx}(y-1) = 3-x$

ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3-x}{y-1}$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,-1)} = \frac{3-2}{-1-1} = \frac{-1}{2}$$

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $= \dfrac{y}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ $y\frac{dy}{dx} = -1\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2. $x^5 = ay^6$ ರೇಖೆಯ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ವರ್ಗವು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಘನಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$ay^6 = x^5$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$6ay^5\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{5x^4}{6ay^5}$$

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $= \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y.6ay^5}{5x^4} = \frac{6ay^6}{5x^4}$

$\therefore$ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ವರ್ಗ $= \frac{36a^2y^{12}}{25x^8}$

ಉಪಲಂಬರೇಖೆ $= y\frac{dy}{dx} = y\frac{5x^4}{6ay^5} = \frac{5x^4}{6ay^4}$

$\therefore$ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಘನ $= \frac{125x^{12}}{216a^3y^{12}}$

$\frac{\text{ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ವರ್ಗ}}{\text{ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಘನ}} = \frac{36a^2y^{12}}{25x^8} \times \frac{216a^3y^{12}}{125x^{12}}$

$$= \frac{36 \times 216\, y^{24}\, a^5}{25 \times 125\, x^{20}}$$

$$= \frac{36 \times 216\, y^{24}\, a^5}{25 \times 125\, a^4 y^{24}} \quad [x^5 = ay^6]$$

$$= \frac{36 \times 216\, a}{25 \times 125} = \text{ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ}$$

$\therefore$ (ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ)^2 α (ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ)^3

3. $y = be^{\frac{x}{a}}$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{dy}{dx} = be^{\frac{x}{a}} \frac{1}{a} = \frac{b}{a} e^{\frac{x}{a}}$$

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $= \dfrac{y}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{y}{\frac{be^{\frac{x}{a}}}{a}} = \dfrac{be^{\frac{x}{a}}}{\frac{be^{\frac{x}{a}}}{a}} = a$, ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ

4. n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $xy^n = a^{n+1}$ ರೇಖೆಯ ಉಪಲಂಬವು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ?

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$y^n + x.ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $y^{n-1}\left(y+nx\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{nx}$

$\therefore$ ಉಪಲಂಬ $= y.\dfrac{dy}{dx} = y.\left(\dfrac{-y}{nx}\right) = \dfrac{-y^2}{nx}$

$$= \frac{-y^2 y^n}{n.a^{n+1}} = \frac{-y^{n+2}}{na^{n+1}}$$

ಇದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ $y^{n+2}=1$ ಆಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ $n+2=0$, ಅಥವಾ $n=-2$ ಆಗಿರಬೇಕು.

5. $x^m.y^n = a^{m+n}$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x-ನಿರ್ದೇಶಕದಂತೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$mx^{m-1}y^n + x^m ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-mx^{m-1}y^n}{nx^m y^{n-1}} = \frac{-my}{nx}$$

$$\text{ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y.nx}{-my} = \frac{-nx}{m}$$

$\therefore$ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ α x

6. $y^2 = 4ax$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x–ನಿರ್ದೇಶಕದ ಎರಡರಷ್ಟು ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\text{ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{\frac{2a}{y}} = \frac{y^2}{2a} = 2x$$

$$= 2\ (x\text{–ನಿರ್ದೇಶಕ})$$

$$\text{ಉಪಲಂಬರೇಖೆ} = y\frac{dy}{dx} = y.\frac{2a}{y} = 2a = \text{ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ}$$

ಅಭ್ಯಾಸ – 12.2

1. $y = b \sin \frac{x}{a}$ ರೇಖೆಯ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲಾದರೂ, ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $y = a^x$ ರೇಖೆಯ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $ay^2 = (x+b)^3$ ರೇಖೆಯ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ವರ್ಗವು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $y^n = a^{n-1}x$ ರೇಖೆಯ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಾದರೂ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ n ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

6. $xy = c^2$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು y ನಿರ್ದೇಶಕದ ಘನಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $ax^2+by^2 = k$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು x ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 18$ ರೇಖೆಗೆ (8,6) ರಲ್ಲಿ

(ii) $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ ರೇಖೆಗೆ (1,1) ರಲ್ಲಿ

(iii) $x = a\sin^2\theta$, $y = a\tan\theta$ ರೇಖೆಗೆ 'θ' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

(iv) $ay^2 = (a+x^2)(3a-x)$ ರೇಖೆಗೆ $x=a$ ಆದಾಗ

(v) $x^2 + xy + y^2 = 7$ ರೇಖೆಗೆ (1,–3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

(vi) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ ರೇಖೆಗೆ (9,4) ರಲ್ಲಿ

(vii) $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ ರೇಖೆಗೆ 'θ' ನಲ್ಲಿ

(viii) $y = 5x - 4x^3 + 2$ ರೇಖೆಗೆ, ಈ ರೇಖೆ y–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ

(ix) $y = x^2 - 3x + 5$ ರೇಖೆಗೆ (1,3) ರಲ್ಲಿ

(x) $y = x\sin x$ ರೇಖೆಗೆ $x = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ

9. $x^m y^m = a^{m+n}$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು x ನಿರ್ದೇಶಕದ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $y = ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು xನಿರ್ದೇಶಕದ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತೀಯ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $x^{m+n} = a^{m-n}y^{2n}$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ mನೇ ಘಾತವು, ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ n ನೇ ಘಾತದ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $x = a+b\log[(b+\sqrt{(b^2-y^2)}] - \sqrt{b^2-y^2}$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಲಂಬರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $y = a\log(x^2-a^2)$ ರೇಖೆಗೆ ಉಪಲಂಬರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12.5 ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕವು ಒಂದು ದರಮಾಪಕ

$y=f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. $x=a$ ಆದಾಗ $y=f(a)$ ಮತ್ತು $x = a+h$ ಆದಾಗ $y = f(a+h)$ ಆದ್ದರಿಂದ x ಚರವು a ಯಿಂದ $a+h$ ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ, y ಚರವು $f(a)$ ಯಿಂದ $f(a+h)$ ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದೆ. y ನಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ $f(a+h) - f(a)$ ಮತ್ತು x ನಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ $a+h - a = h$

$$\therefore \frac{f(a+h - f(a)}{h} = \frac{y\text{ನಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ}}{x\text{ನಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ}}$$

ಇದು $x=a$ ನಲ್ಲಿ y ನ ಬದಲಾವಣೆಯ *ಸರಾಸರಿ ದರವನ್ನು* ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ $h \to 0$ ಆದ ಹಾಗೆ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ

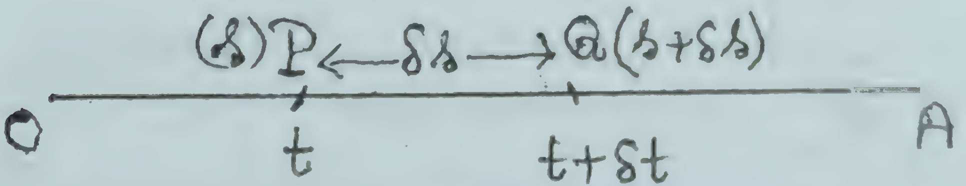
$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right] = f'(a)$$

$f'(a)$ ಬೆಲೆಯು $x=a$ ನಲ್ಲಿ $y=f(x)$ ನ ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ಎನ್ನುವುದು (x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ) y ನ ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ

ಒಂದು ವಸ್ತುವು OA ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 12.7

O ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು. ವಸ್ತುವು O ಬಿಂದುವನ್ನು ದಾಟಿದ t ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ತರುವಾಯ P ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯೂ $t+\delta t$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ತರುವಾಯ Q ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ (ಚಿತ್ರ 12.7).

$OP = s,\ OQ = s + \delta s \ \therefore PQ = \delta s$

ಅಂದರೆ, δt ಕಾಲದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವು δs ದೂರ ಚಲಿಸಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{\delta s}{\delta t}$ ಎಂಬುದು, ವಸ್ತುವು P ಯಿಂದ Q ಗೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ, ಸರಾಸರಿ ವೇಗ.

ಈಗ, Q ಬಿಂದುವು P ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ $\delta t \to 0$ ಆಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ವೇಗ

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$$

ಇದನ್ನು v ಎಂದು ಬರೆದರೆ

$$v = \frac{ds}{dt}$$

ಎಂಬುದು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವಿನ ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ವೇಗ. ಇದೇ ರೀತಿ ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ವೇಗ v ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ (a) ದೊರಕುವುದು.

$$a = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ a &= v\frac{dv}{ds} \\ a &= \frac{d^2 s}{dt^2} \end{aligned}\right]$$ ಇವು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೂಪಗಳು.

$a = 0$ ಆದರೆ ವೇಗವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದರ್ಥ.

12.6 'ಬಲ'ವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದು (ಬಲ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ)

ನ್ಯೂಟನ್ಸ್‌ನ 2 ನೆಯ ನಿಯಮದಂತೆ ಬಲವು (ಫೋರ್ಸ್) ಆ ದಿಕ್ಕಿನ ಸಂವೇಗದ (ಮೊಮೆಂಟಮ್) ಬದಲಾವಣೆಯ ದರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸರಿಯಾದ

ಮೂಲಮಾನಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವುದರಿಂದ, ಬಲವು ಸಂವೇಗದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

= ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷದ ಗುಣಲಬ್ಧ

ಇಲ್ಲಿ, ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ("ಮಾಸ್") ಸ್ಥಿರ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು ವಸ್ತುವು t ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ತರುವಾಯ s ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಚಲಿಸಿದೆ ಮತ್ತು

$$s = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3$$

ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷಗಳನ್ನು (i) $t = 2$ ಸೆಕೆಂಡ್ ಆದಾಗ (ii) $t = 8$ ಸೆಕೆಂಡ್ ಆದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$s = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8t - \frac{1}{3}3t^2 \qquad \text{ಅಂದರೆ, } v = 8t - t^2$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 8 - 2t \qquad \text{ಅಂದರೆ, } a = 8 - 2t$$

(i) $t = 2$ ಸೆಕೆಂಡ್ ಆದಾಗ $v = 8.2 - 2^2 = 12$ ಮೀ/ಸೆ

$a = 8–2.2 = 4$ ಮೀ/ಸೆ^{2}

(ii) $t = 8$ ಸೆ ಆದಾಗ $v = 8.8 - 8^2 = 0$

$a = 8 - 2.8 = -8$ಮೀ/ಸೆ^{2}

$v = 0$ ಎಂದರೆ ವಸ್ತುವು ಒಂದು ಕ್ಷಣ ಚಲಿಸದೇ ಇರುವುದು ಎಂದರ್ಥ. ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು ಋಣ ಚಿಹ್ನೆ ಹೊಂದಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು ಕ್ಷೀಣವಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂದೂ OAಗೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

2. ಒಂದು ಕಲ್ಲನ್ನು ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೇಲೆ ಎಸೆದಾಗ t ಸೆಕೆಂಡ್‌ನಲ್ಲಿ s ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಚಲಿಸಿದೆ ಮತ್ತು $s = 28t - 4.9t^2$ ಆಗ, 2 ಸೆಕೆಂಡ್ ನಂತರ ಅದರ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಎಷ್ಟು?

$$s = 28t - 4.9t^2$$

$$\therefore\ v = \frac{ds}{dt} = 28 - 4.9 \times 2t$$

$$= 28 - 9.8\,t$$

$$\frac{dv}{dt} = -9.8$$

2 ಸೆಕೆಂಡ್‌ನಂತರ, ಕಲ್ಲಿನ ವೇಗ $= 28 - (9.8)2 = 8.4$ ಮೀ/ಸೆ

ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ $a = \frac{dv}{dt} = -9.8$ ಮೀ/ಸೆ^{2}

3. ಒಂದು ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ದೂರ ಮತ್ತು ಕಾಲವನ್ನು

$$s = a\cos 5t + b\sin 5t$$

ಸೂತ್ರದಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು ದೂರದ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$s = a\cos 5t + b\sin 5t$$

$$\therefore\ v = \frac{ds}{dt} = -5a\sin 5t + 5b\cos 5t$$

ಮತ್ತು $a = \frac{dv}{dt} = -25\,a\cos 5t - 25b\sin 5t$

$$= -25\,(a\cos 5t + b\sin 5t)$$

$$= -25s$$

$\therefore\ a \propto s$

4. 2 ಮೂಲಮಾನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯುಳ್ಳ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಬಲವು ಪ್ರಯೋಗವಾದಾಗ ಅದರ ಚಲನೆ $s = 10\cos 2t$ ಯಿಂದ ತಿಳಿಯುವುದು. ಗರಿಷ್ಠ ಬಲ ಎಷ್ಟು?

$\frac{ds}{dt} = -20\sin 2t$ ಮತ್ತು $\frac{d^2s}{dt^2} = -40\cos 2t$

ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದ ಬಲ $= m\frac{d^2s}{dt^2} = 2\,(-40\cos 2t)$

$= -80\cos 2t$ ಮೂಲಮಾನ

ಈಗ, $\cos 2t$ ಯ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ 1

$\therefore$ ಗರಿಷ್ಟ ಬಲ $= -80$ ಮೂಲಮಾನ

ಋಣಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯು ವಸ್ತುವು ಮೂಲಸ್ಥಾನದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

5. ಒಂದು ತಲೆಕೆಳಗಾದ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದ ನೀರಿನ ಪಾತ್ರೆಯಿಂದ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 8 c.c. ದರದಲ್ಲಿ ನೀರು ಸೋರಿಹೋಗುತ್ತಿದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯ ತಳ ವರ್ತುಲಾಕಾರ ಹೊಂದಿದ್ದು ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆಂ.ಮೀ.ಇದೆ. ಪಾತ್ರೆಯ ಆಳ 12 ಸೆ.ಮೀ. ಇದೆ. ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ 6 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ನೀರು ಸೋರುತ್ತಿರುವ ದರ ಎಷ್ಟು?

ಒಂದು ಲಂಬ ವರ್ತುಲಾಕಾರ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆಗಿದ್ದು, ಅದರ ಎತ್ತರವು h ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಶಂಕುವಿನ ಗಾತ್ರವು

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

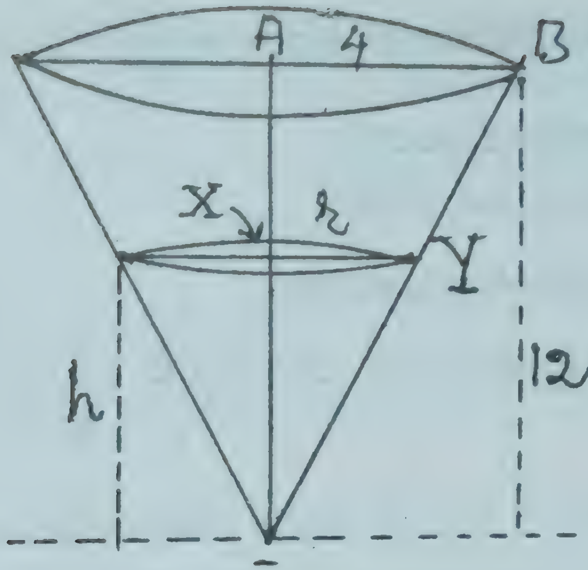
ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 12.8 ರಲ್ಲಿ

$AB = 4$ ಸೆ.ಮೀ., $OA = 12$ ಸೆ.ಮೀ., $OX = h$ ಮತ್ತು $XY = r$

$\Delta^{le} OXY$ III^r $\Delta^{le} OAB$

$$\therefore \frac{r}{h} = \frac{4}{12} \text{ ಅಥವಾ } r = \frac{1}{3}h$$

$$\therefore v = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{9} . h = \frac{\pi h^3}{27}$$



ಚಿತ್ರ 12.8

$$\therefore h^3 = \frac{27\,v}{\pi}$$

ಇದು h ಮತ್ತು v ಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$3h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{27}{\pi} \frac{dv}{dt}$$

ಅಥವಾ $\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi h^2} \frac{dv}{dt}$

ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಮತ್ತು ವೇಗದ ದತ್ತ ಬೆಲೆಗಳು

$$\frac{dv}{dt} = 8,\ h = 6 \ \therefore \frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi .36} .8 = \frac{2}{\pi}$$ ಸೆ.ಮೀ/ನಿ

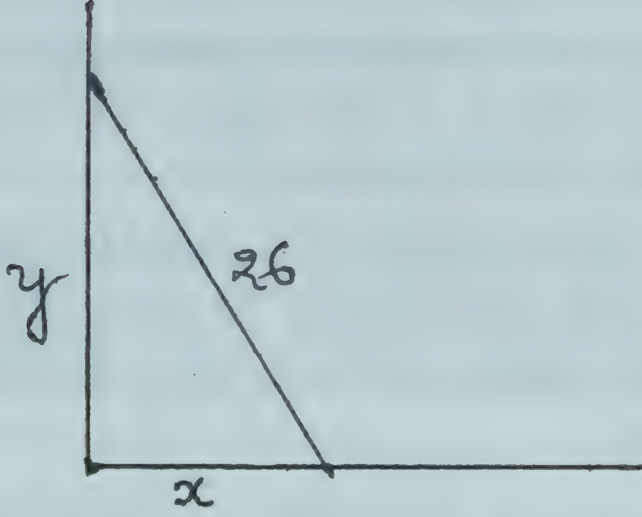
ಆದ್ದರಿಂದ, ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ $\frac{2}{\pi}$ ಸೆಂ.ಮೀ./ನಿ. ದರದಲ್ಲಿ ಇಳಿಯುತ್ತಿದೆ.

6. 26 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ಏಣಿಯು ಒಂದು ಗೋಡೆಗೆ ವಾಲಿಸಿ ನಿಂತಿದೆ. ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯು ಕ್ಷಿತಿಜದ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 3 ಅಡಿಗಳಂತೆ ಜಾರುತ್ತಿದೆ. ಏಣಿಯ ಕೆಳತುದಿ ಗೋಡೆಯಿಂದ 10 ಅಡಿ ಇದ್ದಾಗ

(a) ವೇಗ, (b) ಏಣಿಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ

ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೋಡೆಯ ತಳಭಾಗದಿಂದ ಏಣಿಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವು x ಮತ್ತು y ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.9).



ಚಿತ್ರ 12.9

$\therefore\ x^2 + y^2 = 26^2$ .... (1)

ಕಾಲಸೂಚಿತವಾದ t ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ (1) ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \quad ....(2)$$

ಈಗ, $\frac{dx}{dt} = 3$ ಮತ್ತು $x = 10$ ಆದಾಗ, $y = 24$ ಆಗುವುದು.

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$(10)3 + 24.\frac{dy}{dt} = 0$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dt} = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಏಣಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ $\frac{5}{4}$ ಅಡಿಗಳ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಭಾಗದ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ $\frac{dy}{dt}$ ಯ ಬೆಲೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ, t ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ y ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಏಣಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗವು ಕೆಳಭಾಗದ ಕಡೆಗೆ ಜಾರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 12.3

1. ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಾ t ಅವದಿಯಲ್ಲಿ s ದೂರ ಚಲಿಸುವುದು ಮತ್ತು $s = t^3 - 6t^2 + 8t - 4$. ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು 12ಮೀ/ಸೆ^{2} ಆಗುವ ಕಾಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಆಗ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು?

2. 6 ಅಡಿ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಮನುಷ್ಯನು 4ಮೈ/ಗಂ.ಯ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿತಿಜಾಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೀಪದ ಕಂಬದಿಂದ ದೂರ ನಡೆಯುವನು. 20 ಅಡಿ ಎತ್ತರದ ಕಂಬದ ದೀಪದಿಂದ ಕ್ಷಿತಿಜಾಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಆತನ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು 10 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ 4 ಅಂಗುಲಗಳಿಂದ 12 ಅಂಗುಲಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಅದಾದ 5 ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ ಉಂಟಾಗುವ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಕಂಡುಯಿಡಿಯಿರಿ. ತ್ರಿಜ್ಯವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದೆ?

4. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು 4 ಮೈ/ಗಂಟೆ ದರದಲ್ಲಿ 80 ಅಡಿ ಎತ್ತರದ ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಪಾದದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಪಾದದಿಂದ 60 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ದರದಿಂದ ತುದಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ?

5. ಮೇಲ್ಮುಖ ಪಾದ 8 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು ಆಳ 12 ಅಂಗುಲ ಇರುವ ಶಂಕು-ಆಕೃತಿಯ (ಕಾನಿಕಲ್) ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗೆ ಒಂದು ದ್ರವವನ್ನು 10ಅಂಗುಲ/ಸೆ. ನಂತೆ ಸುರಿಯುತ್ತಿದೆ. 9 ಅಂಗುಲದವರೆಗೆ ಪಾತ್ರೆ ತುಂಬಿದಾಗ ಎಷ್ಟು ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷದಿಂದ ದ್ರವದ ಮಟ್ಟ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿದೆ?

6. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 8 ಚ.ಸೆಂ. ಮೀ. / ಸೆ. ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದೆ. ಆ ಗೋಳದ ಗಾತ್ರವು 500 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮಸಿಯ ಗುರುತು ಬ್ಲಾಟಿಂಗ್ ಪೇಪರ್ ಮೇಲೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಾ ಇದೆ ಮತ್ತು t ಸೆಕೆಂಡ್‌ನಲ್ಲಿ $r = 2t^2 - \frac{t^3}{4}$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ತಿಳಿಯುವುದು. $t = 4$ ಸೆಕೆಂಡ್ ಆದಾಗ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಬೆಲೂನಿನ ಗಾತ್ರವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 10 ಘ. ಸೆಂ. ಮೀ. ಆದಾಗ, ಬೆಲೂನಿನಂತೆ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಉರುಳೆಯ (ಸಿಲಿಂಡರಿನ) ತ್ರಿಜ್ಯವು ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 2 ಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಏಕಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವುದು. ಎತ್ತರವು 20 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು 10 ಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಗಾತ್ರವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ವಸ್ತುವು t ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ s ಮೀಟರ್ ಚಲಿಸಿದರೆ, s ಗೂ t ಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಚಲಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭವಾದ 5ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ವೇಗ ಎಷ್ಟು? ವೇಗ ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಎಷ್ಟು?

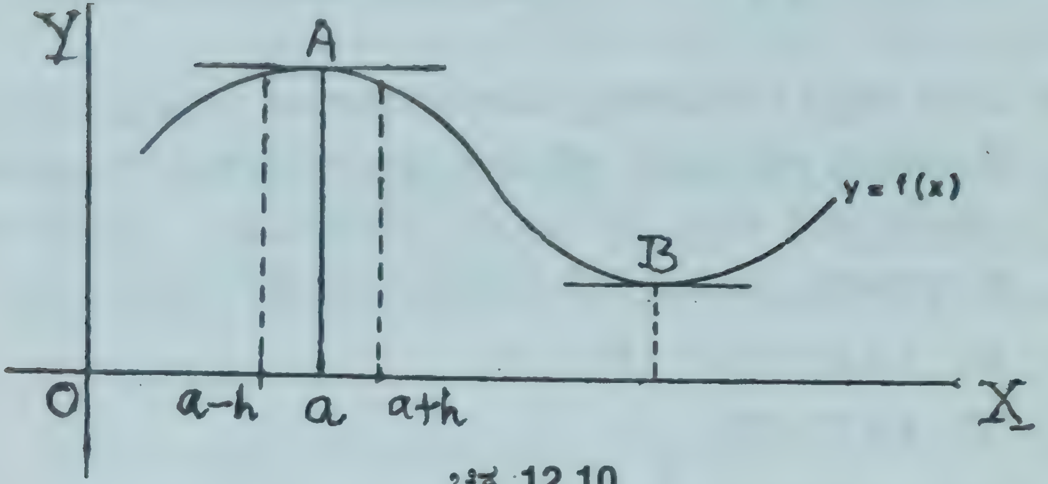
(1) $s = 2t^3 - 36\, t^2 + 50\, t - 35$

(2) $s = t^3 - 3t^2$

(3) $s = 10 \cos \dfrac{t}{2}$

(4) $s = 20 - 5t + t^3$

12.7 ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು



ಚಿತ್ರ 12.10

ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯವರೆಗೂ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗಿ ನಂತರ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ಈ ಬೆಲೆಗೆ *ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ* ಎನ್ನುವರು.

ಇದೇ ರೀತಿ, ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯವರೆಗೂ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಹೋಗಿ ನಂತರ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ಉತ್ಪನ್ನದ ಆ ಬೆಲೆಗೆ *ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ*ಎನ್ನುವರು.

ಚಿತ್ರ 12.10 ರಲ್ಲಿ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಹೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಹೊಂದಿದೆ. A ನಲ್ಲಿ x ನಿರ್ದೇಶಕ a ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ y ನಿರ್ದೇಶಕ $f(a)$ ಆಗಿರುವುದು. A ಯ ಸಮೀಪದ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಇತರ y ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಗಿಂತ $f(a)$ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $f(a) > f(a+h)$ ಮತ್ತು $f(a) > f(a-h)$. (ಇಲ್ಲಿ h ಎನ್ನುವುದು ಸಣ್ಣ ಧನಾತ್ಮಕ ಚರಸಂಖ್ಯೆ).

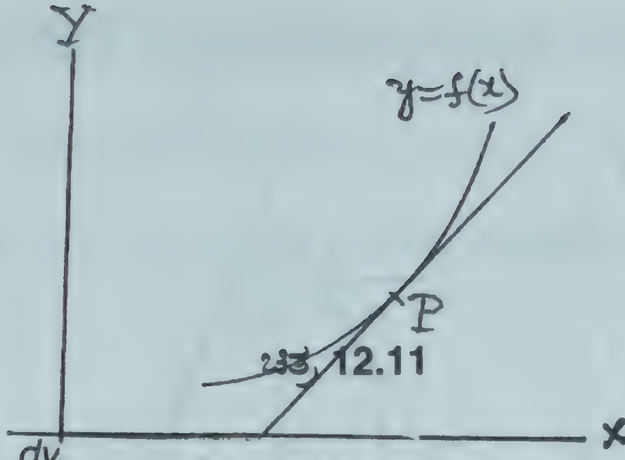
ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು $x=a$ ನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಹೊಂದಬೇಕಾದರೆ, $f(a) > f(a + h)$ ಮತ್ತು $f(a) > f(a-h)$.

$x = a$ ನಲ್ಲಿ $f(a)$ ಎನ್ನುವುದು $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ.

12.8 ವೃದ್ಧಿಸುವ ಮತ್ತು ಕ್ಷೀಣಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

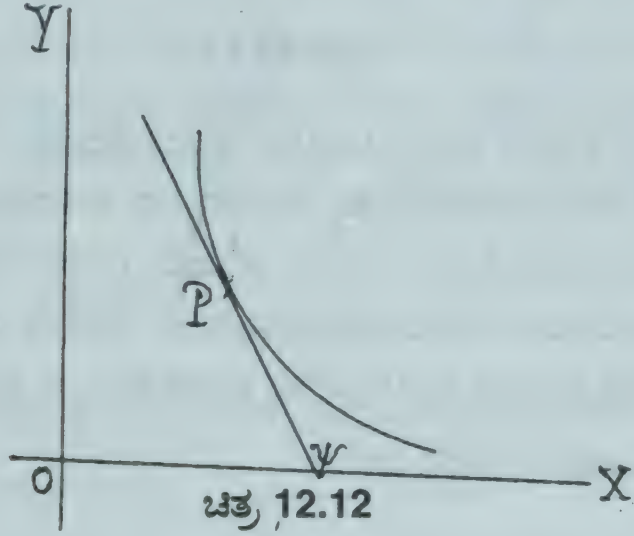
ಚಿತ್ರ 12.11ರಲ್ಲಿ $y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನ ಇರಲಿ. $P(x, y)$ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು. P ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ψ *ಲಘುಕೋನ*ವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tan \psi, \text{ ಧನಸಂಖ್ಯೆ}$$



ಚಿತ್ರ 12.11

ಈ ರೀತಿ, $\frac{dy}{dx}$ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ, x ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಹೆಚ್ಚಿದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಒಂದು ಧನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ.

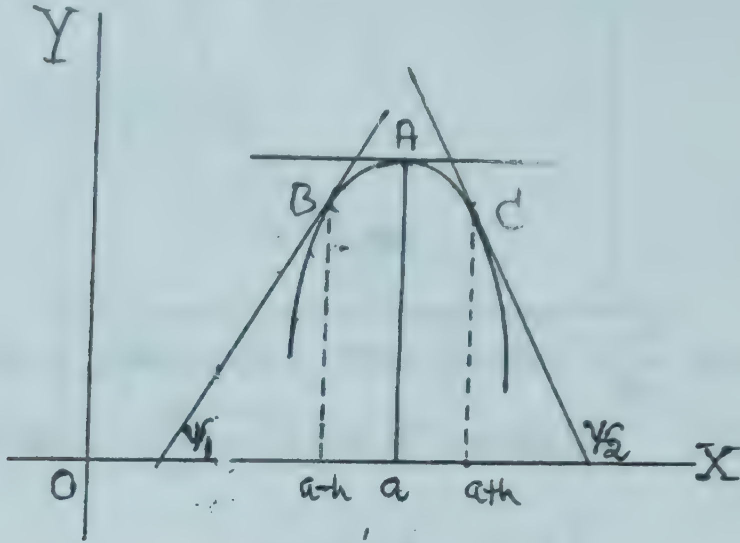


ಚಿತ್ರ 12.12

ಚಿತ್ರ 12.12 ರಲ್ಲಿ x ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು. P ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ***ಅಧಿಕ ಕೋನ*** ψ ಯನ್ನು x–ಅಕ್ಷದೊಡನೆ ಮಾಡಿದೆ. ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dx} = \tan\psi$, ಋಣಬೆಲೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{dy}{dx}$ ಋಣಬೆಲೆಯಾದರೆ x ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, x ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ y ಕಡಿಮೆ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಋಣಬೆಲೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y ಹೆಚ್ಚುವುದೂ ಇಲ್ಲ ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದೂ ಇಲ್ಲ ವಾದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y ಸ್ಥಾಯಿ ಆಗಿದೆ ಎನ್ನುವರು. ಇಂತಹ ಬಿಂದುನಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\frac{dy}{dx} = 0$ ಆಗಿರುವುದು.

12.9 ಉತ್ಪನ್ನವು ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಆಗಿರಲು ಷರತ್ತುಗಳು



ಚಿತ್ರ 12.13

$y = f(x)$ ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. A ಎನ್ನುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು A ಬಿಂದುವಿನ x–ನಿರ್ದೇಶಕ a ಇರಲಿ. ಆಗ $f(a) > f(a+h)$ ಮತ್ತು $f(a) > f(a-h)$. B ಮತ್ತು C ಗಳು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ A ಯ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. B ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿನೊಂದಿಗೆ ψ_1 ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ψ_1 ಲಘುಕೋನವಾದ್ದರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = \tan \psi_1 = \text{ಧನ ಬೆಲೆ.}$$

A ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\frac{dy}{dx} = 0$.

C ನಲ್ಲಿ x–ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿನೊಂದಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ψ_2 ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ψ_2 ಅಧಿಕಕೋನವಾದ್ದರಿಂದ $\tan \psi_2 =$ ಋಣ (ಚಿತ್ರ 12.13).

ಈಗ x ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಸಾಗುತ್ತಾ a ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ $\frac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆಯು ಧನದಿಂದ ಋಣಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುವುದು ಅಂದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ನಿಷ್ಪನ್ನ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಬೆಲೆಯು A ನಲ್ಲಿ ಋಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು A ನಲ್ಲಿ ($x=a$ ನಲ್ಲಿ) *ಗರಿಷ್ಠ*ವಾಗಲು ಬೇಕಾದ ಷರತ್ತುಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

(i) $\frac{dy}{dx} = 0$

(ii) A ನಲ್ಲಿ ($x=a$ ನಲ್ಲಿ) $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಋಣಬೆಲೆಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಆಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠಬೆಲೆ $f(a)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ $y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=a$ ನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಲು ಷರತ್ತುಗಳು :

(i) $\frac{dy}{dx} = 0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ಧನಬೆಲೆ ($x = a$ ನಲ್ಲಿ)

ಸೂಚನೆ:

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅದೇ ದೊಡ್ಡಬೆಲೆ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು ಅದೇ ಚಿಕ್ಕಬೆಲೆ ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಅನೇಕ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $3-2x+x^2$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x>1$ ಆದರೆ ವೃದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$y = 3-2x+x^2$. ಇರಲಿ

$\therefore \frac{dy}{dx} = -2+2x$

y ವೃದ್ಧಿಸಬೇಕಾದರೆ $\frac{dy}{dx} > 0$

ಅಂದರೆ, $-2(1-x)>0$

ಅಥವಾ $-(1-x)>0$

$\therefore x > 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x > 1$ ಆದರೆ ಉತ್ಪನ್ನವು ವೃದ್ಧಿಸುವುದು.

2. x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು (i) ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವುದು ಮತ್ತು (ii) ಕ್ಷೀಣಿಸುವುದು ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

$y = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ ಇರಲಿ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x - 36 = 3(x^2 - 4x - 12)$$

$$= 3(x-6)(x+2)$$

(i) $x < -2$ ಆದಾಗ ಅಂದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯು $-\infty$ ಮತ್ತು -2 ಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದಾಗ $x+2$ ಮತ್ತು $x-6$ ಎಂಬ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳೂ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} > 0$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ y ಯು ವೃದ್ಧಿಸುವುದು.

(ii) x ನ ಬೆಲೆ -2 ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇದ್ದು 6 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ, $x+2>0$ ಮತ್ತು $x-6<0$ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ

$$\frac{dy}{dx} < 0$$

ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ y ಯು ಕ್ಷೀಣಿಸುವುದು.

(iii) $x > 6$ ಆದರೆ $x - 6$ ಮತ್ತು $x + 2$ ಎರಡೂ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುವು ಮತ್ತು

$$\frac{dy}{dx} > 0.$$

ಆದ್ದರಿಂದ y ಯು ವೃದ್ಧಿಸುವುದು.

(iv) $x = 6$ ಮತ್ತು $x=-2$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx} = 0$. ಅಂದರೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ y ಸ್ಥಾಯಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇವು ***ತಿರುಗಣೆ ಬಿಂದುಗಳು*** (ಟರ್ನಿಂಗ್ ಪಾಯಿಂಟ್ಸ್).

ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ, $-2<x<6$ ಆದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ಕ್ಷೀಣಿಸುವುದು.

$x > 6$ ಅಥವಾ $x < -2$ ಆದರೆ ಉತ್ಪನ್ನವು ವೃದ್ಧಿಸುವುದು.

3. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$y = 8x^5 - 15x^4 + 10x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 40x^4 - 60x^3 + 20x$$

$$= 20x(2x^3 - 3x^2 + 1)$$

$$= 20x(x-1)^2(2x+1)$$

ಈಗ, $x = 0, x = 1, x = \frac{-1}{2}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = 0$ ಆಗುವುದು.

ಹಾಗೆಯೇ $\frac{d^2y}{dx^2} = 160\,x^3 - 180\,x^2 + 20$

$$= 20\,(8x^3 - 9x^2 + 1)$$

(i) $x = 0$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} = 0$ ಮತ್ತು $\frac{d^2y}{dx^2} = 20 > 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, y ಕನಿಷ್ಠವಾಗುವುದು. ಉತ್ಪನ್ನದ ಕನಿಷ್ಠಬೆಲೆ = 0

(ii) $x=1$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ಇದರಿಂದಲೇ y ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

(iii) $x = \frac{-1}{2}$ ಆದರೆ, $\frac{d^2y}{dx^2} = 20\left[\frac{8}{-8} - \frac{9}{4} + 1\right]$

$$= -45 < 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, y ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವುದು.

y ನ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= 8\,(-½)^5 - 15\,(-½)^4 + 10\,(-½)^2$

$$= \frac{-8}{32} - \frac{15}{16} + \frac{10}{4}$$

ಅಂದರೆ, ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= \frac{21}{16}$

4. $y = \sin x + \cos 2x$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ.

ಈಗ, $y = \sin x + dy \cos 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x - 2 \sin 2x$

$$= \cos x - 2\,(2 \sin x \cos x)$$

$$= \cos x\,(1 - 4 \sin x)$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $\cos x = 0$ ಅಥವಾ $\sin x = \frac{1}{4}$.

ಈಗ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು 0 ಮತ್ತು 2π ಅಂತರದ ಒಳಗೆ ಗಮನಿಸಿದರೆ

$\cos x = 0$ ಅಂದರೆ $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ಆಗುತ್ತವೆ.

$\sin x = \frac{1}{4}$ i.e $x = \sin^{-1} \frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\pi - \sin^{-1} \frac{1}{4}$

ಈಗ, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - 4\cos 2x$

(i) $x = \frac{\pi}{2}$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\pi$

$$= -1 + 4 = 3 > 0.$$

(ii) $x = \frac{3\pi}{2}$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = 5 > 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ಆದರೆ y ಕನಿಷ್ಠ ಆಗುವುದು.

(iii) $x = \sin^{-1} \frac{1}{4}$ ಆದರೆ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$$

$$= -\frac{1}{4} - 4\left(1 - 2.\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{-15}{4} < 0$$

(iv) $x = \pi - \sin^{-1} \frac{1}{4}$ ಆದರೆ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-15}{4} < 0$$

$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ ಅಥವಾ $\pi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ ಆದಾಗ

y ಗರಿಷ್ಠ ಆಗುವುದು.

ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ x ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು y ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 9/8, 9/8 ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳೂ ಮತ್ತು 0, –2 ಉತ್ಪನ್ನದ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳೂ ಆಗುತ್ತವೆ.

5. $\dfrac{\log x}{x}$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ($0<x<\infty$).

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ ಇರಲಿ.}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x\dfrac{1}{x} - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

ಈಗ, $f'(x) = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $\log_e x = 1$ ಅಥವಾ $x = e$.

$$f''(x) = \frac{x^2 . \dfrac{-1}{x} - (1-\log x) . 2x}{x^4}$$

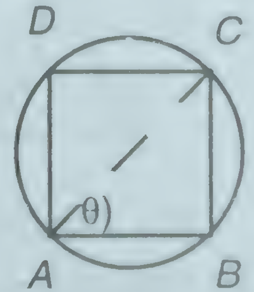
$$= \frac{-3x + 2x\log x}{x^4}$$

$$\therefore f''(e) = \frac{-3e+2e}{e^4} = \frac{-1}{e^3}, \text{ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=e$ ಆದಾಗ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುವುದು ಮತ್ತು ಅದರ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $\dfrac{\log e}{e}$ ಅಂದರೆ $\dfrac{1}{e}$ ಅಥವಾ e^{-1} ಆಗುವುದು.

6. a ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆ ಉಳ್ಳ ಆಯವನ್ನು ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸಬೇಕಾದರೆ ಆ ಆಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

a ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $ABCD$ ಆಯವನ್ನು ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. AC ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರಲೇಬೇಕು (ಚಿತ್ರ 12.14)



ಚಿತ್ರ 12.14

$\angle CAB = \theta$ ಇರಲಿ.

$$AB = AC\cos\theta$$

$$= 2a\cos\theta$$

$BC = AC \sin\theta$

$= 2a \sin\theta$

ಆಯದ ಸುತ್ತಳತೆ s ಆದರೆ

$s = 4\ a \cos\theta + 4\ a \sin\theta$

$\therefore\ \frac{ds}{d\theta} = -4a \sin\theta + 4a \cos\theta$

ಮತ್ತು $\frac{d^2s}{d\theta^2} = -4a \cos\theta - 4a \sin\theta$

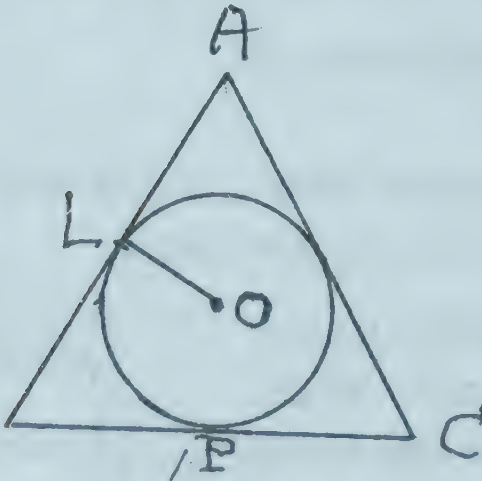
ಈಗ, $\frac{ds}{d\theta} = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $\tan\theta = 1$

θ ಲಘುಕೋನವಾದ್ದರಿಂದ, $\theta = \frac{\pi}{4}\ \therefore AB = BC$

ಹಾಗೂ, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ $\frac{d^2s}{d\theta^2}$ = ಋಣಸಂಖ್ಯೆ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗರಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆ ಉಳ್ಳ ಆಯವೊಂದನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಚಚ್ಚೌಕವಾಗಿರಬೇಕು.

7. r ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸಿದರೆ ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆಯು $6r\sqrt{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 12.15

$OA = x$ ಇರಲಿ ($x > r$). AO ರೇಖೆಯು BC ಯನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. A ಯಿಂದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಹಾಗೂ P ನಲ್ಲಿಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವೂ ಸೇರಿ ABC ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. $OL = r$ (ಚಿತ್ರ 12.15)

$$AL = \sqrt{OA^2 - OL^2} = \sqrt{x^2 - r^2}$$

$$BP = AP \tan B\hat{A}P$$

$$= AP \tan L\hat{A}O$$

$$= AP \frac{OL}{AL} = (r + x) \frac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

Δ^{le} ABC ಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು p ಎಂದು ಕರೆದರೆ, ಆಗ

$$p = AB + BC + CA$$

$$= AB + AC + BC$$

$$= 2AB + 2BP$$

$$= 2(AL + LB) + 2BP$$

$$= 2AL + 4\,BP$$

$$= 2(\sqrt{x^2 - r^2}) + \frac{4(r+x)\,r}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \frac{2(x+r)^2}{\sqrt{x^2 - r^2}} \quad \text{.... (i)}$$

$$\therefore \frac{dp}{dx} = 2 \left[\frac{2(x+r)\sqrt{x^2 - r^2} - x(x+r)^2 (x^2 - r^2)^{-1/2}}{(x^2 - r^2)} \right]$$

$$= \frac{2(x+r)\,(x^2 - xr - 2r^2)}{(x^2 - r^2)^{3/2}}$$

ಈಗ, $\frac{dp}{dx} = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $x = -r$ ಅಥವಾ $x = 2r$ ಆಗಬೇಕು.

ಆದರೆ, $x = -r$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 2r$. ಇದನ್ನು (i) ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ $p = 6\sqrt{3}\,r$ ಬರುವುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ – 12.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನವು ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠವಾಗುವಂತಹ x ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $3x^3 - 9x^2 - 27x + 30$

2. $4x^3 - 9x^2 - 12x + 15$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 1$ ನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ, ಕನಿಷ್ಠ ಆಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\frac{x(x+3)}{x-1}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $4x^5 - 25x^4 + 40x^3 - 8$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=0$ ನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠವೂ ಆಗಿಲ್ಲ, ಕನಿಷ್ಠವೂ ಆಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು 6 ಮೀ. ಇವೆ. ಇದರ ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $ABCD$ ಆಯದಲ್ಲಿ $AB = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $BC = 5$ ಸೆಂ. ಮೀ. CD ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು $PC = x$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. $PA^2 + PB^2$ ನ್ನು x ನಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿ. ಇದು ಯಾವಾಗ ಕನಿಷ್ಠವಾಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $x+y = 2$ ಮತ್ತು x^2y ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವಂತೆ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ABC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತವಾಗುವಂತೆ BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಾಹುವಿರುವಂತೆ ಆಯವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಿದೆ. ಈ ಆಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾದಾಗ ಅದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. ಒಂದು ಆಯಾಕಾರದ ಆವರಣದ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಗೋಡೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮೂರು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಬೇಲಿಯೂ ಇರುವುದು. ಆವರಣದ ಸಲೆಯು 500 ಚ.ಮೀ. ಆಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಬೇಲಿಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ತಂತಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

11. ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಮಧ್ಯೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು $60°$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 20. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 100 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 16.

(i) ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ

(ii) ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ
ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ?

15. x^x ಉತ್ಪನ್ನವು $x = \frac{1}{e}$ ಆದಾಗ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಯತ್ರ ಗ್ರಹಸ್ಯ ಪರಮಂ ಫಲಂ ತತ್ರೈವ
ಗತಿಫಲಾಭಾವೇನ ಭವಿತವ್ಯಂ ।

- "ಎಲ್ಲಿ (ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ) ಗ್ರಹದ ಸ್ಥಾನವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿದೆಯೇ ಅಲ್ಲಿ ಆ ಗ್ರಹದ (ತಾತ್ಕಾಲಿಕ) ಗೋಚರ ಗತಿಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ".

- ಭಾಸ್ಕರ - (ಕ್ರಿ.1114)

ಉದಾಹರಣೆ: $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\therefore \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x \text{ ಅಥವಾ } -\cot^{-1}x$$

ಈಗ, $\tan^{-1}x - (-\cot^{-1}x) = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

= ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ

ನಿಷ್ಪನ್ನಶಾಸ್ತ್ರ (ಅವಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ)ದಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಅನುಕಲನದ ಮೂಲರೂಪಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ನಿಯಮಗಳಿಲ್ಲ. ನಿಷ್ಪನ್ನದ ವಿಲೋಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವ ಅನುಕಲನದ ಮೂಲರೂಪಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅವಕಲನಗಳಿಗೆ c ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1)$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x\ (x>0)$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

$\int \sin x dx = -\cos x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\int \cos x\, dx = \sin x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

$\int \mathrm{cosec}^2 x dx = -\cot x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$

$\int \sec x \tan x dx = \sec x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\int \mathrm{cosec}x \cot x = -\mathrm{cosec}x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}x)$

$= -\mathrm{cosec}x \cot x$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\int e^x dx = e^x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}\left[\frac{a^x}{\log a}\right] = a^x$

$\int \sinh x dx = \cosh x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

$\int \cosh x dx = \sinh x$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

$\int \text{sech}^2 x\, dx = \tanh x$

$\int \text{cosech}^2 x\, dx = -\coth x$

$\int \text{sech} x \tanh x\, dx = -\text{sech} x$

$\int \text{cosech} x \coth x\, dx = -\text{cosech} x$

13.4 $\int dx$ ಸಂಕೇತವು ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಗಳು

1. $\frac{d}{dx}\int \phi(x) dx = \phi(x)$ ಆದರೆ

$$\left[\int \frac{d}{dx}\phi(x)\right] dx = \phi(x)+c$$

(ಅಂದರೆ, ಅನುಕಲನ ಮತ್ತು ಅವಕಲನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಬಹುದು.)

2. $\frac{d}{dx}\left[\int udx + \int vdx + \int wdx\right] = u+v+w$

$\therefore \int udx + \int vdx + \int wdx = \int (u+v+w)dx$

3. $\frac{du}{dx} = v$ ಆಗಿದ್ದು a ಯು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ

$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx} = av$

$\therefore au = \int avdx$ ಅಥವಾ

$a\int vdx = \int avdx$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

2. $\int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + C$

3. $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-2} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{-2x^2} + C$

4. $\int ax\,dx = a\int xdx = \frac{ax^2}{2} + C$

5. $\int \frac{x}{a+x} dx = \int \frac{x+a-a}{a+x} dx = \int dx - a\int \frac{1}{x+a} dx$

$= x - a\log(x+a) + C$

6. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log(ax+b) + C$

7. $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})\,dx$

$= 5\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \log x + 2\frac{x^{-2+1}}{-1}$

$= x^5 - x^4 + x^3 + \log x - \frac{2}{x} + C$

8. $\int (x^2-1)(3x^3-2)dx$

$=\int(3x^5-3x^3-2x^2+2)dx$

$= 3\int x^5dx-3\int x^3dx-2\int x^2dx+2\int dx$

$$=\frac{3.x^6}{6}-\frac{3.x^4}{4}-\frac{2.x^3}{3}+2x+C$$

$$=\frac{x^6}{2}-\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+2x+C$$

9. $\int \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

$$=\int\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)dx$$

$=\int x^4\,dx+2\int dx+\int x^{-4}dx$

$$=\frac{x^5}{5}+2x+\frac{x^{-3}}{-3}+C$$

10. $\int\frac{x^4+3x^3+4x^2+5}{x^{1/3}}dx$

$=\int x^{11/3}\,dx+3\int x^{8/3}\,dx+4\int x^{5/3}\,dx+\int 5\,x^{-1/3}\,dx$

$$=\frac{3x^{14/3}}{14}+\frac{3.3x^{11/3}}{11}\underset{8}{+}\frac{4.3x^{8/3}}{2}+\frac{5.3x^{2/3}}{}+C$$

$$=\frac{3}{14}x^{14/3}+\frac{9}{11}x^{11/3}+\frac{3}{2}x^{8/3}+\frac{15}{2}x^{2/3}+C$$

11. $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x\,dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$$=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$=\int\sec^2 x\,dx-\int\sec x\tan x\,dx$

$=\tan x-\sec x+C$

12. $\int ae^x dx=ae^x+C$

ಅಭ್ಯಾಸ - 13.1

ಅನುಕಲಿಸಿ (xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ)

1. x^n, $a+x$, $a+x^2$, $a-x^n$, a^2+x^n

2. $\frac{a}{x}$, $\frac{a+x}{x}$, $\frac{1}{a+x}$, $\frac{a-x}{x}$

3. $3x^7-4x^6-5x^3+7$

4. $(x^3-1)^2$

5. $(1-x^2)(1-x)$

6. $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2$

7. $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$

8. $\frac{x^5+2x^4+x^3}{\sqrt{x}}$

9. $9\,\text{cosec}^2x - 8\,\text{cosec}x\,\cot x$

10. $\frac{1}{1-\sin x}$

11. $\frac{1}{1-\cos x}$

12. $\frac{1}{1+\cos x}$

13. $\sqrt{1+\sin 2x}$

14. $\sqrt{1-\sin 2x}$

15. $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

16. $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

17. $(\tan x+\cot x)^2$

13.5 ಆದೇಶಕ್ರಮದಿಂದ ಅನುಕಲನ

1. $\int (ax+b)^n \, dx$ — $ax+b = z$ ಇರಲಿ.

   xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

   $= \frac{1}{a} \int z^n dz$ — $adx = dz$

   $= \frac{1}{a} \; \frac{z^{n+1}}{n+1}$

   $= \frac{(ax+b)}{a(n+1)} + C$

2. $\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx$ — $ax+b = t$ ಇರಲಿ

   $\therefore \; adx = dt$

   $= \frac{1}{a} \int t^{-n} dt$

   $= \frac{1}{a} \; \frac{t^{-n+1}}{-n+1}$

   $= \frac{1}{a\,(1-n)} \, (ax+b)^{-n+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{ax+b}$ — $ax+b = t$ ಇರಲಿ

   $\therefore \; adx = dt$

   $= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t}$

   $= \frac{1}{a} \log t$

   $= \frac{1}{a} \log (ax+b) + C$

4. $\int \frac{dx}{x+a}$ — $x+a = t$ ಇರಲಿ

   $\therefore \; dx = dt$

   $= \int \frac{dt}{t}$

   $= \log t + C = \log(x+a) + C$

5. $\int \sin 5x \sin 3x \, dx$

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು:

$$\sin A \sin B = ½ \, [\cos (A-B) - \cos (A+B)]$$

$$\therefore \int \sin 5x \sin 3x \, dx = ½ \int (\cos 2x - \cos 8x) \, dx$$

$$= ½ \int (\cos 2x \, dx - ½ \int \cos 8x dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{2.2} - \frac{1}{2.8} \sin 8x + C$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C$$

6. $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx$

$$= \int (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx$$

ಈಗ, $\cos x = t$ ಇರಲಿ. $\therefore \sin x \, dx = -dt$

$$\therefore \int \sin^3 x \, dx = -\cos x + \int t^2 dt$$

$$= -\cos x + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

ಸೂಚನೆ:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

7. $\int \frac{1}{e^{3x+b}} \, dx$

$3x+b = t$ ಇರಲಿ

$\therefore \; 3dx = dt$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{e^t} = \frac{1}{3} \int e^{-t} \, dt$$

$$= \frac{-e^{-t}}{3} + C = - \frac{e^{-(3x+b)}}{3} + C$$

8. $\int \sec x\, dx$

1 ನೇ ವಿಧಾನ:

ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $(\sec x + \tan x)$ನಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$\int \frac{(\sec^2 x + \sec x \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$\sec x + \tan x = t$ ಇರಲಿ

$\therefore (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t + C$$

$$= \log(\sec x + \tan x) + C$$

2ನೇ ವಿಧಾನ:

$\tan \frac{x}{2} = z$ ಇರಲಿ.

ಲಾಗರಿತಮ್ ತೆಗೆದಾಗ

$$\log \tan \frac{x}{2} = \log z$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{dz}{z}$$

ಅಂದರೆ, $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dz}{z}$

ಅಥವಾ $\int \text{cosec } x\, dx = \log z + C = \log \tan \frac{x}{2} + C$

ಈಗ, $x = \frac{\pi}{2} + y$ ಇರಲಿ. $\therefore dx = dy$

$$\therefore \int \text{cosec}\left[\frac{\pi}{2} + y\right] dy = \log\tan \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + C$$

$$\int \sec y\, dy = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) + C$$

$$\therefore \int \sec x\, dx = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

ಮತ್ತು $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ಅಭ್ಯಾಸ – 13.2

ಅನುಕಲಿಸಿ.

1. $(x+1)^5$ 2. $\frac{1}{(x+1)^7}$ 3. $\frac{1}{2x+1}$ 4. $\frac{1}{(3x+1)^5}$

5. $(ax+3)^4$ 6. $\sin(ax+b)$ 7. $\sin(2x+1)$

8. $\frac{1}{\sqrt{5-3x}}$ 9. $\sqrt{1+\cos x}$ 10. $\sqrt{\sin^2 x}$

11. $\cos^2 x$ 12. $\sin x \cos x$ 13. $\sin^2 x \cos^2 x$ 14. $\sin^3 x$

15. $\cos^3 x$ 16. $\sin 3x \sin 2x$ 17. $\cos 3x \cos 5x$

18. $\sin 7x \cos 3x$ 19. $\tan^2 x$ 20. $\tan^4 x$ 21. $\cot^2 x$

22. $\cot^4 x$ 23. $\sec^3 x \tan x$ 24. $\cos^4 x$ 25. e^{ax+b}

26. $\cos(2-3x)$ 27. $\operatorname{cosec}(5x-3)\cot(5x-3)$

28. $\sec(3x+2)\tan(3x+2)$ 29. $(7-3x)^4$ 30. $\sqrt{ax+b}$

31. $\sqrt{\tanh x}\,\operatorname{sech}^2 x$ 32. $\coth^2 x \operatorname{cosech}^2 x$ 33. $\frac{\cosh^3 x}{\sinh^5 x}$

34. $\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{3x}}+\frac{1}{e^{5x}}$ 35. $\operatorname{cosec}^4 x$

36. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ 37. $\frac{1}{\sin^2 x}$ 38. $\frac{1}{\sin^2 5x}$

39. $\frac{1}{4x-3}$ 40. $\frac{1}{\sqrt{a-x}}$ 41. $e^x+e^{-x}+e^{-2x}$

42. $\sec 2x$ 43. $\operatorname{cosec} 2x$ 44. $\sin^4 x$

13.6 $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx$ ಮತ್ತು $\int \frac{f'(x)\,dx}{[f(x)]^n}$ ರೀತಿಯ ಅನುಕಲಗಳು

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}$

$\cos x = t$ ಇರಲಿ. ಆಗ $-\sin x\,dx = dt$

$$\therefore \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log t = -\log \cos x$$

$$= \log \sec x + C$$

2. $\int \frac{8x+5}{4x^2+5x+3}\,dx$ $\qquad 4x^2+5x+3 = t$ ಇರಲಿ

$\therefore (8x+5)\,dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t = \log(4x^2+5x+3) + C$$

3. $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\qquad \sin^{-1}x = t$ ಇರಲಿ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dt$$

$$= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2 + C$$

4. $\frac{\int e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)\,[\sqrt{3+e^{m\tan^{-1}x}}]^{1/2}}\,dx$ $\qquad 3+e^{m\tan-1x} = t$ ಇರಲಿ.

$$\therefore \frac{me^{m\tan-1x}}{1+x^2}\,dx = dt$$

$$= \int \frac{1}{m\,t^{1/2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{m}t^{1/2} + C = \frac{2}{m}(3+e^{m\tan^{-1}x})^{1/2} + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

ಈ ಅನುಕಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\int \cot x dx$ 2. $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^3}$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^5}$

4. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ 5. $\int x^3 \sqrt{1-x^4}\, dx$ 6. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$

7. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$ 8. $\int \frac{\sec^2 x dx}{1+\tan x}$ 9. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x dx}{1+\cot x}$

10. $\int \frac{\tan^{-1} x dx}{1+x^2}$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x}$ 12. $\int \frac{(1+\tan^{-1} x)^m dx}{1+x^2}$

13. $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$ 14. $\int \frac{dx}{x \log x}$

15. $\int \frac{e^{m \sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}\,(2+e^{m \sin^{-1} x})} dx$ 16. $\int \frac{x^3 dx}{4+3x^4}$ 17. $\int \frac{x e^{x^2}}{\sqrt{1+e^{x^2}}} dx$

18. $\int \frac{dx}{e^x (1+e^x)}$ 19. $\int \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x} dx$

20. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-2\sin x}}$ 21. $\int \frac{\sec^2 x dx}{(a+b \tan x)^5}$

22. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{4+3\sin^2 x}$ 23. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{5+2\cos^2 x}$

24. $\int \frac{(a+b \log x)^m}{x} dx$ 25. $\int \frac{\sqrt{3+4\tan x}}{\cos^2 x} dx$

26. $\int \frac{\sqrt{a-b\cot x}}{\sin^2 x} dx$ 27. $\int \cos x\, e^{\sin x} \sqrt{a+be^{\sin x}}\, dx$

28. $\int \frac{dx}{x \sqrt{\log x}}$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಅನುಕಲಿಸಿ :

29. $\sin ax$ 30. $\sin \frac{ax}{b}$ 31. $\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

32. $x \sin x^2$ 33. $x^2 \sin ax^3$ 34. $\cos ax$

35. $\cos \frac{x}{a}$ 36. $x \cos(x^2+1)$ 37. $x^2 \cos(1+x^3)$

38. $\sin^2 x \cos x$ 39. $\cos^3 x \sin x$

40. $\sec^2 x \tan x$ 41. $\tan mx$

42. $\cot ax$ 43. $\sec ax$

44. $\operatorname{cosec} mx$ 45. $x \tan x^2$

46. $x^2 \cot x^3$ 47. $(\tan x - \cot x)^2$

13.7 ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಆದೇಶಗಳು

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ $x = a \tan\theta$ ಆರಲಿ.

$\therefore\ dx = a \sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{a \sec^2\theta\, d\theta}{a^2 + a^2\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{a} \int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

2. $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx$

$$= \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$$

$$\frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x}$$ ಇರಲಿ

$$\therefore \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{A(a+x) + B(a-x)}{(a-x)(a+x)}$$

ಅಥವಾ $1 = A(a+x) + B(a-x)$

$x = a$ ಆದರೆ $\quad 1 = A(2a) \quad A = \frac{1}{2a}$

$x = -a$ ಆದರೆ $\quad 1 = B(2a) \quad B = \frac{1}{2a}$

$$\therefore \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)} = \int \frac{1}{2a(a-x)} dx + \int \frac{dx}{2a(a+x)}$$

$$= \frac{-1}{2a} \log(a-x) + \frac{1}{2a} \log(a+x)$$

$$= \frac{1}{2a} [\log(a+x) - \log(a-x)]$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + C}$$

3. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx \int \frac{1}{(x-a)(x+a)} dx$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)}$$ ಇರಲಿ.

$$\therefore \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A(x+a) + B(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

ಅಥವಾ $1 = A(x+a) + B(x-a)$

$x = a$ ಆದಾಗ $\quad A = \frac{1}{2a}$

$x = -a$ ಆದಾಗ $\qquad B = -\dfrac{1}{2a}$

$$\therefore \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\,dx = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,dx$$

$$= \frac{1}{2a}\log(x-a) - \frac{1}{2a}\log(x+a)$$

$$= \frac{1}{2a}[\log(x-a) - \log(x+a)]$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C}$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$x = a\sin\theta$ ಇರಲಿ

$\therefore dx = a\cos\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}} = \int d\theta = \theta + C$$

$$= \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\boxed{\therefore \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C}$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$x = a\sinh\theta$ ಇರಲಿ.

$\therefore dx = a\cosh\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{a\cosh\theta\, d\theta}{a\sqrt{1+\sinh^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C = \log\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + C}$$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $x = a\cosh\theta$ ಇರಲಿ.

$\therefore dx = a\sinh\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{a\sinh\theta\, d\theta}{a\sqrt{\cosh^2\theta - 1}} = \int d\theta = \theta + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C}$$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಮೂಲರೂಪದಂತೆ ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು:

1. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

2. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C$

3. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C = \log\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + C$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C$

ಸೂಚನೆ: $\sinh^{-1}x = \log(x+\sqrt{1+x^2})$

$\cosh^{-1}x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$

$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$, $\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$

7. $\int \frac{dx}{7+5x^2}$ $\qquad x\sqrt{5} = \sqrt{7}\tan\theta$ ಇರಲಿ

$\therefore \sqrt{5}\, dx = \sqrt{7}\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{7}\sec^2\theta\, d\theta}{7+7\tan^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{35}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{35}}\theta + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{35}} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}} + C$$

8. $\int \frac{dx}{8\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

(ಉತ್ಪನ್ನದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು $\sec^2 x$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ)

$$= \int \frac{\sec^2 x dx}{8 + 3\tan^2 x}$$ $\qquad \sqrt{3}\tan x = \sqrt{8}\tan\theta$ ಇರಲಿ.

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{8}\sec^2\theta\, d\theta}{8+ 8\tan^2\theta}$$ $\qquad \therefore \sqrt{3}\sec^2 x\, dx = \sqrt{8}\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{24}}\theta + C = \frac{1}{\sqrt{24}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \tan x\right) + C$$

9. $\int \frac{dx}{8-3x^2}$ $\qquad x\sqrt{3} = \sqrt{8}\tanh\theta$ ಇರಲಿ.

$\therefore \sqrt{3}\, dx = \sqrt{8}\,\text{sech}^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{8}\,\text{sech}^2\theta\, d\theta}{8-8\tanh^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{8}.\sqrt{3}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{24}}\theta + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} \tanh^{-1} \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{8}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1+\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{8}}}{1-\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{8}}} + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}} \log \frac{\sqrt{8} + x\sqrt{3}}{\sqrt{8} - x\sqrt{3}} + C$$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$ $\quad x\sqrt{3} = 2\sinh\theta$ ಇರಲಿ

$\therefore \sqrt{3}dx = 2\cosh\theta \, d\theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2\cosh\theta \; d\theta}{\sqrt{4+4\sinh^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{3}.2} \int \frac{\cosh\theta}{\cosh\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \theta + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh^{-1} \frac{x\sqrt{3}}{2} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{1 + \frac{3x^2}{4}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \log (x\sqrt{3} + \sqrt{4+3x^2}) + C$$

•11. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ $\quad 3x = 4\sin\theta$ ಇರಲಿ

$\therefore 3dx = 4\cos\theta \, d\theta$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{4\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}} = \frac{1}{3} \int d\theta = \frac{1}{3} \theta + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3x}{4} + C$$

12. $\int \frac{dx}{4-9x^2} = \int \frac{dx}{(2-3x)(2+3x)} = \int \left[\frac{A}{2-3x} + \frac{B}{2+3x} \right] dx$

$1 = A(2+3x) + B(2-3x)$

$3x = -2$ ಆದಾಗ, $1 = 4B \quad \therefore B = \frac{1}{4}$

$3x = 2$ ಆದಾಗ, $1 = 4A \quad \therefore A = \frac{1}{4}$

$\therefore$ ಅನುಕಲ $= \int \frac{1}{4(2-3x)} dx + \int \frac{1}{4(2+3x)} dx$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-3} \log(2-3x) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \log(2+3x) + C$

$= \frac{1}{12} \log \frac{2+3x}{2-3x} + C$

13. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ $\qquad x = a \sin\theta$ ಇರಲಿ

$\therefore dx = a \cos\theta \, d\theta$

$= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta} \, .\, a\cos\theta \, d\theta$

$= a^2 \int \cos^2\theta \, d\theta$

$= a^2 \int ½ (1+\cos 2\theta) \, d\theta$

$= \frac{a^2}{2} \int d\theta + \frac{a^2}{2} \int \cos 2\theta \, d\theta$

$= \frac{a^2}{2} \theta + \frac{a^2}{2} \frac{\sin 2\theta}{2}$

$= \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \, . \, 2 \sin\theta \cos\theta$

$= \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C$

$= \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2}$

14. $\int x^2 \sqrt{1+x^2}\, dx$ $\qquad x = \sinh\theta$

$dx = \cosh\theta \, d\theta$

$= \int \sinh^2\theta \sqrt{1+\sinh^2\theta} \cosh\theta \, d\theta$

$= \int \sinh^2\theta \, \cosh^2\theta \, d\theta$

$$= \int \frac{\sinh^2 2\theta}{4} \, d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{\cosh 4\theta - 1}{2} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int \cosh 4\theta \, d\theta - \frac{1}{8} \int d\theta = \frac{1}{32} \sinh 4\theta - \frac{1}{8} \theta + C$$

$$= \frac{1}{32} .2 \sinh 2\theta \,.\, \cosh 2\theta - \frac{1}{8} \sinh^{-1} x + C$$

$$= \frac{1}{16} \,.\, 2 \sinh\theta \cosh\theta \, (1+2\sinh^2\theta) - \frac{1}{8} \sinh^{-1} x + C$$

$$= \frac{1}{8} \,.\, x \,.\, \sqrt{1+x^2} \, (1+2x^2) - \frac{1}{8} \sinh^{-1} x + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 13.4

ಅನುಕಲಿಸಿ

1. $\frac{1}{4+3x^2}$	2. $\frac{1}{5+9x^2}$	3. $\frac{1}{a+bx^2}$
4. $\frac{x}{4x^4+9}$	5. $\frac{\sqrt{x}}{4x^3 \pm 9}$	6. $\frac{ex}{3e^{2x}+4}$
7. $\frac{\cos x}{5\sin^2 x+9}$	8. $\frac{\sec^2 x}{7+3\tan^2 x}$	9. $\frac{\sinh x}{6+25\cosh^2 x}$
10. $\frac{1}{\sqrt{x}\,(9+4x)}$	11. $\frac{1}{x\{9+4(\log x)^2\}}$	12. $\frac{\sin x}{9+4\cos^2 x}$
13. $\frac{\sin x}{8-3\sin^2 x}$	14. $\frac{\sec^2 x}{5+4\sec^2 x}$	15. $\frac{1}{9\cos^2 x+4\sin^2 x}$
16. $\frac{1}{5+4\cos^2 x}$	17. $\frac{1}{3+4\sin^2 x}$	18. $\frac{e^{m\tan^{-1} x}}{(1+x^2)\,[9+4e^{2m\tan^{-1} x}]}$

19. $\frac{1}{9-4x^2}$

20. $\frac{1}{16-25x^2}$

21. $\frac{1}{10-3x^2}$

22. $\frac{1}{7-4x^2}$

23. $\frac{x}{9-16x^4}$

24. $\frac{x^2}{25-9x^6}$

25. $\frac{\cos x}{9-4\sin^2 x}$

26. $\frac{ex}{8-3e^{2x}}$

27. $\frac{1}{x[4-(\log x)^2]}$

28. $\frac{1}{\sqrt{x}\,[16-9x]}$

29. $\frac{\sqrt{x}}{9-4x^3}$

30. $\frac{\sin x}{12-5\cos^2 x}$

31. $\frac{1}{\sqrt{9+5x^2}}$

32. $\frac{1}{\sqrt{16+3x^2}}$

33. $\frac{1}{\sqrt{7+4x^2}}$

34. $\frac{x}{\sqrt{16+9x^4}}$

35. $\frac{x^2}{25+16x^6}$

36. $\frac{e^x}{\sqrt{5+3e^{2x}}}$

37. $\frac{\cos x}{\sqrt{4+5\sin^2 x}}$

38. $\frac{\cos x}{\sqrt{9-4\cos^2 x}}$

39. $\frac{\sin x}{\sqrt{10-3\sin^2 x}}$

40. $\frac{\cosh x}{\sqrt{4+5\sinh^2 x}}$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

42. $\int \frac{1}{x^2-1}$

43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

44. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

45. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

46. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

47. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

48 $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

49. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

50. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$

51. $\frac{1}{\sqrt{9x^2-16}}$

52. $\frac{x}{\sqrt{4x^4-25}}$

53. $\frac{x^3}{\sqrt{7x^4-9}}$

54. $\frac{e^x}{\sqrt{5e^{2x}-6}}$

55. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{9x^3-8}}$

56. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x-25}}$

57. $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{8\tan^2 x-25}}$

58. $\dfrac{\cosh x}{\sqrt{5-4\sinh^2 x}}$

59. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{9\sin^2 x-8}}$

60. $\dfrac{1}{x\sqrt{4(\log x)^2-9}}$

61. $\dfrac{1}{100+9x^2}$

62. $\dfrac{1}{100-9x^2}$

63. $\dfrac{1}{9x^2-100}$

64. $\dfrac{1}{\sqrt{100-9x^2}}$

65. $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-100}}$

66. $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+100}}$

67. $\sqrt{100-9x^2}$

68. $\sqrt{9-4x^2}$

69. $\sqrt{3-2x^2}$

70. $\sqrt{8-3x^2}$

71. $\sqrt{10-9x^2}$

72. $\sqrt{18-5x^2}$

73. $\sqrt{7-3x^2}$

74. $\sqrt{9+4x^2}$

75. $\sqrt{9+16x^2}$

76. $\sqrt{3+2x^2}$

77. $\sqrt{4+3x^2}$

78. $\sqrt{6}+7x^2$

79. $\dfrac{1}{a^2+b^2x^2}$

80. $\dfrac{1}{7x^2-8}$

81. $\dfrac{1}{4x^2-5}$

81. $\dfrac{1}{5-3x^2}$

83. $\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}$

84. $\dfrac{1}{\sqrt{3+5x^2}}$

85. $\dfrac{1}{\sqrt{5x^2-6}}$

86. $\dfrac{1}{(4+3x^2)}$

87. $\dfrac{1}{\sqrt{8+7x^2}}$

88. $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-8}}$

89. $\sqrt{4-x^2}$

90. $\sqrt{4x^2+25}$

91. $\sqrt{5x^2-6}$

13.8.1 $t = \tan\frac{x}{2}$ ಆದೇಶ ಮಾಡುವ ಅವಕಲನಗಳು

1. $\int \frac{dx}{4 + 3\cos x}$

$\tan\frac{x}{2} = t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[4+3\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]}$$

$\therefore \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dt$

ಅಥವಾ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$= 2\int \frac{dt}{4+4t^2+3-3t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+7}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{7}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right) + C$$

2. $\int \frac{dx}{3+4\sin x}$

$\tan\frac{x}{2} = t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$= \int \frac{2dt}{\left(3 + \frac{4.2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)}$$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$= 2\int \frac{dt}{3+3t^2+8t} = \frac{2}{3}\int \frac{2dt}{t^2+\frac{8}{3}t+1}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{7}}{3}} \log \left[\frac{t+\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}}{t+\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \log \left[\frac{3t+4-\sqrt{7}}{3t+4+\sqrt{7}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \log \left[\frac{3\tan\frac{x}{2}+4-\sqrt{7}}{3\tan\frac{x}{2}+4+\sqrt{7}}\right] + C$$

13.8.2 $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$ **ಮತ್ತು** $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

1. $$\int \frac{dx}{2x^2+3x+5} = \int \frac{dx}{2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}}$$

$x + \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{31}{16}} \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $dx = \sqrt{\frac{31}{16}} \sec^2 d\theta$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{\frac{31}{16}} \sec^2\theta \, d\theta}{\left(\sqrt{\frac{31}{16}} \tan\theta\right)^2 + \frac{31}{16}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{31}{16}}} \int d\theta = \frac{4}{2\sqrt{31}} \theta + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}} \tan^{-1} \left(\frac{x + \frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{31}{16}}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{31}} \tan^{-1} \left(\frac{4x+3}{\sqrt{31}} \right) + C$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(4x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2+4}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}$$

$x+2 = 3 \sin\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ.

$\therefore\ dx = 3 \cos\theta \, d\theta$

$$= \int \frac{3 \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{3^2 - 3^2 \sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C$$

$$= \int \sin^{-1} \frac{x+2}{3} + C$$

3. $$\int \frac{3x+5}{x^2-6x+10} dx$$

ಅಂಶ $= k \frac{d}{dx}$ (ಛೇದ) $+ m$ ಇರಲಿ

$\therefore\ 3x+5 = k(2x-6) + m$

ಎರಡು ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಸಹಾಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ

$2k = 3 \therefore\ k = \frac{3}{2}$

ಈಗ, $-6k+m = 5 \qquad \therefore\ -6\left(\frac{3}{2}\right) + m = 5$

$\therefore\ m = 14$

$$\therefore \int \frac{(3x+5)}{x^2-6x+10}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-6) + 14}{x^2-6x+10}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-6)\,dx}{x^2-6x+10} + 14\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$$

$$= \frac{3}{2}\log(x^2-6x+10) + 14\int \frac{dx}{(x-3)^2+1}$$

$$= \frac{3}{2}\log(x^2-6x+10) + 14\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{1}\right) + C$$

4. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$

ಅಂಶ $= k$ (ಛೇದ) $+ m \cdot \frac{d}{dx}$ (ಛೇದ) ಇರಲಿ.

i.e., $\sin x + 3\cos x = k(3\sin x + 4\cos x) + m(3\cos x - 4\sin x)$ ...(1)

$$\therefore \int \frac{\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{k(3\sin x + 4\cos x) + m(3\cos x - 4\sin x)}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$$

$$= \int k\,dx + m\int \frac{3\cos x - 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$$

$$= kx + m \log (3 \sin x+4 \cos x) + C \qquad .... (2)$$

ಈಗ, $\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ ನ ಸಹಾಪವರ್ತನಗಳನ್ನು (1)ರ ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಹೋಲಿಸಿದರೆ

$$3k-4m = 1$$

$$4k+3m = 3$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$k = \frac{3}{5}, m = \frac{1}{5}$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\therefore \int \frac{(\sin x+3 \cos x)}{3 \sin x + 4 \cos x} dx = \frac{3x}{5} + \frac{1}{5} \log (3\sin x+4\cos x) + C$$

5. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx$

ಇದರಲ್ಲಿ, ಅಂಶದ ಘಾತ ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ, ಹೆಚ್ಚಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಅದರ ಘಾತ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವವರೆಗೂ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $\frac{x^4+1}{x^2+1} = x^2-1 + \frac{2}{x^2+1}$

$$\therefore \int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx = \int x^2 dx - \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + 2 \tan^{-1} x + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 13.5

ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕಲಿಸಿ.

1. $\frac{1}{3+2\cos x}$
2. $\frac{1}{5+6\cos x}$
3. $\frac{1}{8+5\cos x}$
4. $\frac{1}{5+4\sin x}$
5. $\frac{1}{2-\cos x+3\sin x}$
6. $\frac{1}{x^2+2x+5}$
7. $\frac{1}{x^2+4x+6}$
8. $\frac{1}{2x^2+3x+6}$
9. $\frac{1}{x^2+3x-2}$
10. $\frac{1}{x^2-4x-8}$
11. $\frac{1}{3x^2+6x+8}$
12. $\frac{1}{2x^2+4x+9}$
13. $\frac{1}{2x^2+3x+1}$
14. $\frac{1}{\sqrt{4-3x+x^2}}$
15. $\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$
16. $\frac{1}{\sqrt{7-4x-2x^2}}$
17. $\frac{1}{\sqrt{8-5x+x^2}}$
18. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$
19. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$
20. $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x-6}}$
21. $\frac{1}{\sqrt{9-2x-x^2}}$
22. $\sqrt{1+x+x^2}$
23. $\sqrt{x^2+2x+2}$
24. $\sqrt{5+4x-x^2}$
25. $\sqrt{7+3x-x^2}$
26. $\sqrt{2x^2-3x+5}$
27. $\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+3\cos x}$
28. $\frac{x^4+1}{x^2-1}$
29. $\frac{x^3+1}{x+1}$
30. $\frac{x^3-1}{x^2-1}$

13.9 ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬೀಜವಾಕ್ಯಗಳ ಅನುಕಲನ

1. $$\int \frac{1}{(x-2)(x-5)}\, dx$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5}$$

$$= \frac{A(x-5) + B(x-2)}{(x-2)(x-5)}$$

$\therefore\ 1 = A(x-5) + B(x-2)$

$x = 5$ ಆದರೆ $\quad 1 = B.3 \quad B = \frac{1}{3}$

$x = 2$ ಆದರೆ $\quad 1 = A(-3) \quad A = \frac{-1}{3}$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-2)(x-5)} = -1 \int \frac{dx}{3(x-2)} + \int \frac{dx}{3\ (x-5)}$$

$$= -\frac{1}{3} \log (x-2) + \frac{1}{3} \log (x-5) + C$$

$$= \frac{1}{3} \log \frac{x-5}{x-2} + C$$

2. $$\int \frac{(2x^2+1)\, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{2x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

$\therefore\ 2x^2+1 = A\,(x+2)\,(x+3) + B\,(x+1)\,(x+3) + C\,(x+1)\,(x+2)$

$x = -1$ ಆದಾಗ $\ 3 = 2A\ \therefore\ A = \frac{3}{2}$

$x = -2$ ಆದಾಗ $9 = -B \quad \therefore B = -9$

$x = -3$ ಆದಾಗ $19 = 2C \quad \therefore \quad C = \frac{19}{2}$

$$\therefore \int \frac{(2x^2+1)\, dx}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{1}{x+1}\, dx - 9 \int \frac{1}{x+2}\, dx + \frac{19}{2} \int \frac{1}{x+3}\, dx$$

$$= \frac{3}{2} \log (x+1) - 9 \log (x+2) + \frac{19}{2} \log (x+3) + C$$

3. $$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right) dx$$

$1 = A\,(x^2+1) + (Bx+C)\, x$

$x = 1$ ಆದಾಗ $\quad 1 = A.2 + B + C$

$x = 0$ ಆದಾಗ $\quad 1 = A$

$\therefore -1 = B + C \quad \dots (1)$

$x = -1$ ಆದಾಗ $\quad 1 = 2 - (-B+C)$

$-1 = -(-B+C)$

$1 = C - B \quad \dots (2)$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $C = 0$, $B = -1$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

$$= \log x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}$$ [$x^2+1 = t$ ಆದರೆ $2x\,dx = dt$ ಆಗುವುದು

$$= \log x - \frac{1}{2} \log t + C$$

$$= \log x - \frac{1}{2} \log (x^2+1) + C$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 13.6

ಈ ಅನುಕಲನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

2. $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$

3. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$

4. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)^2}$

5. $\int \frac{dx}{x^2-1}$

6. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

7. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

8. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)}$

13.10 ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ

ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನ ಮಾಡುವ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಅನುಕಲನದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಅನುಕಲನ ಮಾಡಲು ಒಂದು ನಿಯಮವಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ *ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ* ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

u ಮತ್ತು v ಗಳು ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನ (xನಲ್ಲಿ)ಗಳಾದರೆ

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int vdu$$

ಅಥವಾ $\int uv' \, dx = uv - \int vu' \, dx$

$\int u \, dx$ ನ್ನು 1 ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ v' ನ್ನು 2ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆದರೆ

$\int$ uv' dx = (1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನ) (2ನೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ)
 − $\int$ (2ನೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ) (1ನೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\underset{(1)}{x} \quad \underset{(2)}{\sin x} \, dx$

$= x(-\cos x) - \int (-\cos x)(1)\, dx$

$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$

2. $\int x^2 \cos 3x \, dx$

$$= x^2 \left(\frac{\sin 3x}{3}\right) - \int \frac{\sin 3x}{3} \, 2x \, dx$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \int \underset{(1)}{x} \, \underset{(2)}{\sin 3x} \, dx$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} - \frac{2}{3} \left[x\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) - \int \left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) 1 \, dx \right]$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} + \frac{2}{3^2} x \cos 3x - \frac{2}{9} \int \cos 3x dx$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} + \frac{2x \cos 3x}{9} - \frac{2}{9} \cdot \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$= \frac{x^2 \sin 3x}{3} + \frac{2x \cos 3x}{9} - \frac{2}{27} \sin 3x + C$$

3. $\int \sin^{-1} x dx$

$$= \int \underset{(1)}{\sin^{-1} x} \, . \, \underset{(2)}{1} \, dx$$

$$= \sin^{-1} x \, . \, x - \int \frac{x \, . \, 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$1-x^2 = t$ ಆಗಿರಲಿ

ಆಗ $-2xdx = dt$ ಆಗುವುದು

$$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{1/2}}$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} t^{1/2}$$

$$= x \sin^{-1} x + (1-x^2)^{1/2} + C$$

4. $\int \log x \, dx$

$$= \int \underset{(1)}{\log x} \, . \, \underset{(2)}{1} \, dx$$

$$= (\log x) x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log x - \int dx$$

$$= x \log x - x + C$$

5. $\int \underset{(2)}{x} \; \underset{(1)}{\log x} \; dx$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x\, dx$$

$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

6. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

ಇದನ್ನು I ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ

$$\therefore\ I = \int \underset{(2)}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \underset{(1)}{1}\ dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int x \frac{1}{2} \frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{1/2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{-(a^2-x^2-a^2)}{(a^2-x^2)^{1/2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2}{(a^2-x^2)^{1/2}}\, dx + \int \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{1/2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int (a^2-x^2)^{1/2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}$$

i.e., $I + I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}$

$$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + C\right]$$

(ಸೂಚನೆ: ಇದೇ ಅನುಕಲವನ್ನು ಹಿಂದೆ $x = a\sin\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ.)

7. $\displaystyle\int \underset{(1)}{x} \; \underset{(2)}{\sec^2 x} \; dx$

$= x\tan x - \int \tan x \,.\, 1\, dx$

$= x\tan x + \log\cos x + C$

8. $\int x \sin 5x \cos 3x \, dx$

$$I = x \,.\, \int \frac{1}{2}\,[\sin 8x + \sin 2x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x \sin 8x \, dx + \frac{1}{2}\int x \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x \,.\, \frac{(-\cos 8x)}{8} - \int \frac{(-\cos 8x)}{8}\, 1\, dx\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[x\,\frac{(-\cos 2x)}{2} - \int \frac{(-\cos 2x)}{2}\, 1\, dx\right]$$

$$= \frac{-x\cos 8x}{16} + \frac{1}{8}\int \cos 8x\, dx - \frac{-x\cos 2x}{4} + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$$

$$= -\frac{x\cos 8x}{16} + \frac{\sin 8x}{64} - \frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

9. $\displaystyle\int \underset{(1)}{x^2} \; \underset{(2)}{e^{ax}}\, dx$

$$I = x^2 \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \,.\, 2x\, dx$$

$$= \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \int \underset{(1)}{x} \; \underset{(2)}{e^{ax}} dx$$

10. $\int_{(1)}^{} e^{ax} \cos bx\, dx$ (1) (2)

$$I = e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \int \frac{\sin bx}{b} . ae^{ax} dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\, dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\left[e^{ax}\left(\frac{-\cos bx}{b}\right) - \int - \frac{\cos bx}{b}\, ae^{ax} dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\, dx$$

$$I + \frac{a^2}{b^2} I = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2}$$

$$\therefore I = \left(\frac{b^2}{b^2(a^2+b^2)}\right) [be^{ax}\sin bx + a\ e^{ax}\cos bx] + C$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2} (be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx) + C$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a\cos bx + b\sin bx) + C$$

11. $\int \frac{x\sin^{-1} x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $x = \sin\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ.

ಆಗ $dx = \cos\theta\, d\theta$ ಆಗುವುದು.

$$= \int \frac{\sin\theta . \theta}{\cos\theta} \cos\theta\, d\theta$$

$= \int \theta \sin\theta\, d\theta$ [ಈಗ ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ]

(1) (2)

$$= \theta(-\cos\theta) - \int (-\cos\theta)\, 1\, d\theta$$

$= -\theta\cos\theta + \int \cos\theta \, d\theta$

$= -\theta\cos\theta + \sin\theta$

$= -\sin^{-1} x (\sqrt{1-x^2}) + x + c$

$= -\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x + x + c$

12. $\int \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \, dx$ 　　 $x = \cos\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ $\therefore \; dx = -\sin\theta \, d\theta$

$= \int \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \, (-\sin\theta) \, d\theta$

$= \int \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}} \, (-\sin\theta) \, d\theta$

$= \int \tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) (-\sin\theta) \, d\theta$

$= -\int \dfrac{\theta}{2}\sin\theta \, d\theta$ 　　 [ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ]

$= -\dfrac{1}{2}\left[-\theta\cos\theta + \int \cos\theta \, d\theta\right]$

$= \dfrac{1}{2}\theta\cos\theta - \dfrac{\sin\theta}{2} + C$

$= \dfrac{1}{2} x\cos^{-1} x - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2}\right) + C$

ಅಭ್ಯಾಸ – 13.7

ಅನುಕಲಿಸಿ

1. $x^3 e^x$	2. $x^2 \log x$	3. $x (\log x)^2$
4. $x^n \log x$	5. $\tan^{-1} x$	6. $x \tan^{-1} x$
7. $\cot^{-1} x$	8. $\sec^{-1} x$	9. $x^2 \sin x$
10. $x \cos x \cos 2x$	11. $x^2 \sin x \cos x$	12. $x \sin x \sec^3 x$
13. $x\, \mathrm{cosec}^2 x$	14. $x \log (1+x)$	15. $e^{4x} \cos 5x$
16. $e^x \cos^2 x$	17. $\sinh 2x \sin 2x$	18. $\dfrac{e^{m \tan^{-1} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
19. $x \cos x$	20. $x \log x$	21. $e^{-ax} \cos bx$
22. $e^{ax} \sin bx$	23. $e^{m \sin^{-1} x}$	24. $\tan^{-1} x$
25. $x^2 \sin^{-1} x$	26. $x \sec^2 x$	27. $\cos^{-1} \dfrac{1}{x}$
28. $\dfrac{e^{m \tan^{-1} x}}{1+x^2}$	29. $\cosh ax \sin bx$	30. $x^6 \sinh x$

ಅಧ್ಯಾಯ - 14

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳು

14.1 ಅನುಕಲನ - ಒಂದು ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿಯಾಗಿ

$f(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸಾಂತ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ ಉತ್ಪನ್ನವು $x=a$ ಮತ್ತು $x=b$ ಎರಡನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, $b>a$ ಇರಲಿ. $b-a$ ಅಂತರವನ್ನು n ಅಂತರಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ ಈ ಅಂತರಗಳ ಉದ್ದಗಳು

$x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ x_3-x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}-x_{n-2},\ x_n-x_{n-1}$ ಆಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿ $a=x_0$, $b=x_n$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

$$(x_1-x_0)\, f(x_0) + (x_2-x_1)\, f(x_1) + (x_3-x_2)\, f(x_2) + \ldots + \ldots + (x_n-x_{n-1})\ f(x_{n-1}).$$

ಇದನ್ನು $\Sigma\ f(x_r)\,\delta x_r$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ, $\delta x_r = x_{r+1} - x_r$

ಅಂತರಗಳು ಅತಿಸಣ್ಣದಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಈ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಮಿತಿಗೆ, $x=a$ ಯಿಂದ $x=b$ ವರೆಗೆ, x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ *ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ* ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅಂದರೆ

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta x_r \to 0}} \sum_{r=0}^{n-1} f(x_r)\delta x_r = \int_a^b f(x)\, dx$$

ಈ ಅನುಕಲದ ಬೆಲೆಯು ಸಾಂತ. ಏಕೆಂದರೆ M ಎನ್ನುವುದು $f(x)$ ನ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಆದರೆ ದತ್ತ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಈ ಮೊತ್ತವು $< M[(x_1-a) + (x_2-x_1) + \ldots + (b-x_{n-1})]$

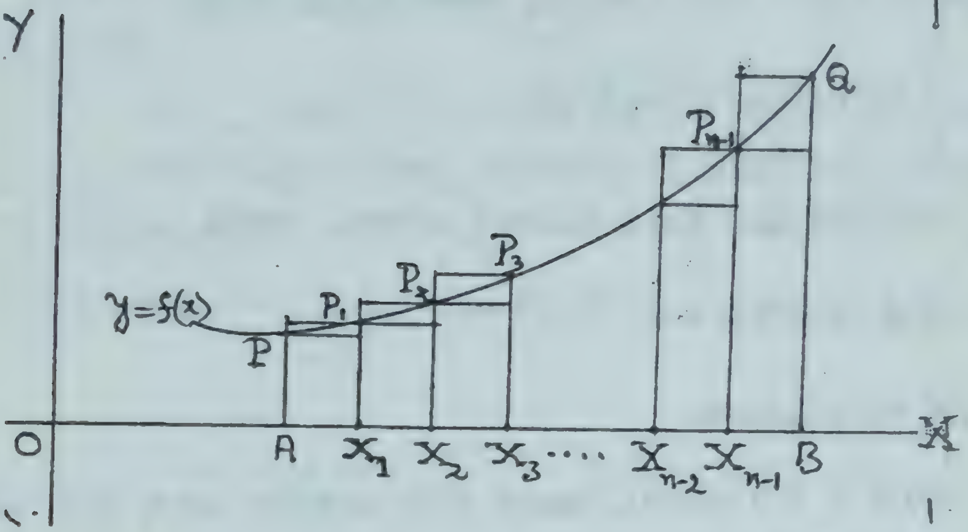
ಅಂದರೆ, ಮೊತ್ತವು $< M(b-a)$

ಇದು ಸಾಂತ ಏಕೆಂದರೆ m, b, a ಎಲ್ಲವೂ ಸಾಂತ.

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ, ಈ ಮಿತಿಯನ್ನು ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ಸರಳ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದು ಕ್ಲಿಷ್ಟಕರ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟೋ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಾಧ್ಯ ಕೂಡ ಆಗಿರುವುದು.

14.2 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ :

1. ಜಾಮಿತಿಯಂತೆ :



ಚಿತ್ರ 14.1

$A, X_1, X_2, \ldots. X_{n-1}, B$ ಗಳು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳ x – ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $a, x, x_2 \ldots x_{n-1}, b$ ಇರಲಿ, ಈ ಬಿಂದುಗಳ y–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $y = f(x)$ ಎನ್ನುವ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯನ್ನು $P, P_1, P_2 \ldots, P_{n-1}, Q$ ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

ಆಗ $AP, X_1 P_1, X_2 P_2 \ldots X_{n-1} P_{n-1}$ ಗಳು $f(a), f(x_1), f(x_2) \ldots. f(x_{n-1})$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ 14.1).

$\therefore \ (x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$ ...(i)

$= AX_1 . AP + X_1 X_2 . X_1 P_1 + \ldots + X_{n-1} B . X_{n-1} P_{n-1}$

$= PX_1, P_1 X_2, \ldots, P_{n-1} B$ ದೊಡ್ಡ ಆಯಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ

ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೂ ಮತ್ತು $APQB$ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು

$< PP_1, P_1 P_2, \ldots., P_{n-1} Q$ ಚಿಕ್ಕ ಆಯಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ

ಈಗ, α ಎನ್ನುವುದು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಪಾದ ಆದರೆ, ಈ ಮೊತ್ತವು

$\alpha \times$ ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $< \alpha (BQ - AP)$. ಈಗ, $\alpha \to 0$ ಆದಾಗ ಇದೂ ಕೂಡ $\to 0$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ BQ, AP ಗಳು ಸಾಂತ. ಆದ್ದರಿಂದ $APQB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಎಲ್ಲ ಆಯಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು (i) ರ ಮಿತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $F'(x) = f(x)$ ಆಗಿದ್ದರೆ $APQB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು $= F(b) - F(a)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \; (x_1-a)\, f(a) + (x_2-x_1)\, f(x_1) + \ldots + (b-x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$

ಎನ್ನುವುದು $F(b) - F(a)$ ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

ಇಲ್ಲಿ, $F(x)$ ಎನ್ನುವುದು $f(x)$ ನ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ. ಅಂದರೆ

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

2. ವಿಶ್ಲೇಷಣ ವಿಧಾನ:

$F'(x) = f(x)$ ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $F(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ $f(x)$. ನಿಷ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{\delta x} = F'(x) = f(x)$$

$$\therefore \; \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} = f(x) + \varepsilon$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\varepsilon \to 0$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ

$$F(x+\delta x) - F(x) = \delta x.\, f(x) + \varepsilon\, \delta x$$

$x = a$ ಮತ್ತು $\delta x = x_1-a$ ಆದರೆ

$$F(x_1) - F(a) = (x_1-a)\, f(a) + \varepsilon_1\, (x_1-a)$$

$x = x_1$ ಇದ್ದಾಗ $\delta x = x_2-x_1$ ಆದರೆ

$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2-x_1)\, f(x_1) + \varepsilon_2\, (x_2-x_1)$$

$x = x_2$ ಇದ್ದಾಗ $\delta x = x_3-x_2$ ಆದರೆ

$$F(x_3)-F(x_2) = (x_3-x_2)\, f(x_2) + \varepsilon_3\, (x_3-x_2)$$

....

....

$x = x_{n-1}$ ಇದ್ದಾಗ $\delta x = b-x_{n-1}$ ಆದರೆ

$$F(b) - F(x_{n-1}) = (b-x_{n-1})\, f(x_{n-1}) + \varepsilon_n\, (b-x_{n-1})$$

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಕೂಡಿದರೆ

$$F(b) - F(a) = (x_1-a)\, f(a) + (x_2-x_1)\, f(x_1) + \ldots + \ldots (b-x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$

$= \varepsilon_1 (x_1 - a) + \varepsilon_2 (x_2 - x_1) + \ldots + \varepsilon_n (b - x_{n-1})$

$< \eta (x_1 - a) + \eta (x_2 - x_1) + \ldots + \eta (b - x_{n-1})$

(η ಎನ್ನುವುದು $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ ಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ)

$= \eta (x_1 - a + x_2 - x_1 + \ldots b - x_{n-1})$

$= \eta (b - a)$

$x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots\ldots b - x_{n-1}$ ಅಂತರಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots\ldots \varepsilon_n$ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಮತ್ತು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದಾದ η ಕೂಡ 0 ಮಿತಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತವೆ.

$$\therefore F(b) - F(a) = \lim_{n \to \infty} [(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})]$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$\int_a^b x^2\, dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_a^b = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3$$

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{3+7x} = \left[\frac{1}{7} \log (3+7x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{7} [\log 10 - \log 3] = \frac{1}{7} \log \frac{10}{3}$$

3. $$\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9} = \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3} [\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{12}$$

4. $\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}\right]_0^a$

$$= \left(0 + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1} 1\right) - 0$$

$$= \frac{\pi}{4} a^2$$

5. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\, dx = [\log \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$$= \log \sin \frac{\pi}{2} - \log \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 0 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2$$

6. $\int_0^{\pi/b} e^{ax} \cos bx\, dx = \left[\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx)\right]_0^{\pi/b}$

$$= \frac{e^{a\pi/b}}{a^2+b^2} (a \cos \pi + b \sin \pi) - \frac{1}{a^2+b^2} (a)$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}\left[e^{a\pi/b} + 1\right]$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 14.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಕಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\int_{1}^{4} x^4\, dx$, $\int_{2}^{3} x^{-2}\, dx$ $\int_{4}^{9} x^{-½}\, dx$, $\int_{0}^{9} (x^2-x+1)\, dx$

2. $\int_{1}^{1} (2x+3)^2\, dx$, $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{(x-2)^3}$ $\int_{0}^{a} (x+a)^n\, dx$

$\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

3. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x}$, $\int_{0}^{a} \frac{dx}{x-a,}$, $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x+5}$, $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x+1}$

4. $\int_{0}^{\pi/2} \sin x\, dx$, $\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{x}{2}\, dx$

5. $\int_{o}^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$, $\int_{o}^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

6. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$, $\int_{0}^{½} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

7. $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$, $\int_{0}^{a} \sqrt{x^2+a^2}\, dx$, $\int_{1}^{2} \sqrt{x^2-1}\, dx$

8. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}, \int_1^3 \frac{dx}{x(2+x)}, \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+3}$

9. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\,d\theta}{1+\cos^2\theta}, \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta, \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\,d\theta$

10. $\int_1^2 x\log x\,dx, \quad \int_1^4 x^2\log x\,dx, \quad \int_a^b \log x\,dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}, \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

12. $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx, \quad \int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

13. $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx, \int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx$

14. $\int_0^1 x^2e^x dx, \quad \int_0^1 \cosh x\,dx$

15. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$

16. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$

17. $\int_0^{\pi} \cos^3\theta \, d\theta, \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$

18. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}, \int_0^1 \sqrt{x^2+6x+10} \, dx$

19. $\int_0^3 \frac{x^2-9}{x^2+9} \, dx, \int_0^1 \frac{x^3}{x+2} \, dx$

20. $\int_0^{\pi/6} \sec x \, dx, \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{cosec} x \, dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\cos x}, \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\cos x}$

22. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx, \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$

23. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)}, \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2(x+3)}$

24. $\int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx, \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos^2 x \, dx$

25. $\int_0^{\pi} \sin 4x \cos 2x \, dx$, $\int_0^{\pi/2} \sin 4x \sin 5x \, dx$

26. $\int_0^{1} x \tan^{-1} x \, dx$

27. $\int_0^{\pi} \dfrac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

28. $\int_0^{1} \dfrac{dx}{e^x + e^{-x}}$

29. $\int_0^{\pi} \dfrac{\sin x}{e^x} \, dx$

30. $\int_0^{1} \dfrac{dx}{x^2 + 2x + 10}$, $\int_0^{1} \dfrac{x \, dx}{x^2+5x+6}$

14.3 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಗಳು

$F(x)$ ಎನ್ನುವುದು $f(x)$ನ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

1. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ಮತ್ತು

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

ಅಂದರೆ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲದ ಮಿತಿ a ಮತ್ತು b ಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲದ ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾಗುವುದು.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

ಬಲಗಡೆ ಭಾಗ $= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$

$= F(b) - F(a)$

$=$ ಎಡಭಾಗ.

3. $f(x)$ *ಬೆಸ* ಅಥವಾ *ಸಮ* ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \text{ ಅಥವಾ } 2\int_0^a f(x)\,dx$$

ಈಗ, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)\,dx$

$$= -\int_{-a}^{0} f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)dx$$

$$= +\int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

ಮೊದಲನೆಯ ಅನುಕಲದಲ್ಲಿ

$x = -t$ ಹಾಕಿದಾಗ

$dx = -dt$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx \quad \text{.... (1)}$$

1ನೇ ಸಂದರ್ಭ: $f(x)$ ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ

$-f(x) = f(-x)$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

ಅಥವಾ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2ನೇ ಸಂದರ್ಭ: $f(x)$ ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ

$f(-x) = f(x)$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

ಅಥವಾ $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$

4. $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(t)\, dt$

ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ $x=t$ ಹಾಕಿದರೆ $dx = dt$ ಆಗುವುದು.

$\therefore$ ಎಡಭಾಗ $= \int_{a}^{b} f(t)\, dt =$ ಬಲಭಾಗ

ಅಂದರೆ, $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(t)\, dt$

5. $\int_{0}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\, dx$

$a-x = t$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $dx = -dt$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$x = a$ ಆದರೆ $t = 0$ ಮತ್ತು $x = 0$ ಆದರೆ $t = a$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \text{ ಬಲಭಾಗ } = \int_a^0 -f(t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx = \text{ ಎಡಭಾಗ}$$

$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

6. (i) $f(x)$ ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ

$$\int_0^{2a} (x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

(ii) $f(x)$ ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ

$$\int_0^{2a} f(x)dx = 0$$

$$\text{ಈಗ } \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$$

2ನೆಯ ಅನುಕಲದಲ್ಲಿ $x = 2a - t$ ಹಾಕಿದರೆ $dx = -dt$ ಆಗುವುದು.

$x = a$ ಆದರೆ $t = a$, $x = 2a$ ಆದರೆ $t = 0$.

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^0 f(2a-t)\,(-dt)$$

$$= \int_0^a f(x)dx - \int_a^0 f(2a-t)dt$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \qquad \dots (1)$$

1ನೇ ಸಂದರ್ಭ: $f(2a-x) = f(x)$ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ (1) ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx$$

2ನೇ ಸಂದರ್ಭ: $f(2a-x) = -f(x)$ ಇದ್ದರೆ ಆಗ (1) ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a -f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= 0$$

$\therefore \int_0^{2a} f(x) = 2\int_0^a f(x)\,dx$, $f(2a-x) = f(x)$ ಆದಾಗ

ಮತ್ತು $\int_0^{2a} f(x) = 0$, $f(2a-x) = -f(x)$ ಆದಾಗ

ಉದಾಹರಣೆ

1. (i) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ ಕಾರಣ, $\sin(\pi-x) = \sin x$

(ii) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$ ಕಾರಣ, $\cos(\pi-x) = -\cos x$

2. $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

$$I = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \qquad \text{.... (1)}$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin (\pi - x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x \, dx \qquad \text{.... (2)}$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$2 I = \int_0^{\pi} \pi \sin x \, dx$$

$$= \pi[(-\cos x)]_0^{\pi}$$

$$= \pi(1+1)$$

ಅಥವಾ $2I = 2\pi$

$\therefore I = \pi$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} \quad dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx \qquad \text{... (1)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\, dx \qquad \text{.... (2)}$$

Adding (1) and (2), we get

$$2\,I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

4. $\int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx$ .... (1)

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx \qquad \text{.... (2)}$$

Adding (1) and (2) we get

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\log \tan x + \log \cot x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log (\tan x \cot x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log 1 \, dx = 0$$

i.e., $2I = 0 \quad \therefore \; I = 0$

5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$

$x = \tan\theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ

ಆಗ, $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ ಆಗುವುದು.

$x \to \infty$ ಆದಾಗ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$x = 0$ ಆದಾಗ $\theta = 0$ ಆಗುವುದು.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan\theta \; \sec^2\theta\, d\theta}{(1+\tan\theta)\sec^2\theta}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta}\, d\theta \qquad \ldots (1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta \qquad \text{... (2)}$$

Adding (1) and (2), we get

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\theta + \cos\theta)d\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta = \left[\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \ I = \frac{\pi}{4}$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 14.2

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $\int_0^{\pi} x \tan^2 x\, dx = -\frac{\pi^2}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x) = \frac{\pi}{8} \log 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x - \cos x)}{1+\sin x \cos x}\, dx = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ:

7. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$

8. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan x}\, dx$

9. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{3\sin x + 4\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

10. $\int_{0}^{1} \log \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$

11. $\int_{0}^{a} x\sqrt{a-x}\, dx$

12. $\int_{0}^{\pi} x\cos^2 x\, dx$

13. $\int_{0}^{\pi} x\tan^2 x\, dx$

14. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cot x}{1+\cot x}\, dx$

15. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

16. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

17. $\int_{0}^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$

18. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$

19. $\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

20. $\int_{0}^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx$

21. $\int_{0}^{1} x(1-x)^n\, dx$

14.4 ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ

$\int_a^b f(x)\,dx$ ನ್ನು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿಸಿದೆ. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲದ ಅನ್ವಯ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನವು ಒಂದು ಶ್ರೇಡಿಯ ಮೊತ್ತದ ಮಿತಿ ಎಂಬ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. $[a,b]$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಇರಲಿ, $a \leq x \leq b$ ಈ ಅಂತರವನ್ನು n ಸಮಭಾಗಮಾಡಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಉದ್ದ

$$h = \frac{b-a}{n}$$

ಆಗಿರುವುದು.

ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} h\,[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \text{----}\; f(a+\overline{n-1}\,h)]$$

14.5 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲದ ಅನ್ವಯ

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ ಒಂದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಂತೆ:

$y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆ ಗಮನಿಸಿ, $f(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಧನ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಿವರಣೆಯ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಭಾವಿಸೋಣ. A ಮತ್ತು B ಗಳು ನಕ್ಷೆಯ (ಚಿತ್ರ 14.2) ಬಿಂದುಗಳು ಆಗಿವೆ. A ಬಿಂದುವಿನ x–ನಿರ್ದೇಶಕ a ಮತ್ತು B ಬಿಂದುವಿನ x–ನಿರ್ದೇಶಕ b ಆಗಿವೆ. AN ಮತ್ತು BT ಗಳು ಈ ಬಿಂದುಗಳ y ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿವೆ. AB ಯನ್ನು n ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿದೆ; ಪ್ರತಿಭಾಗದ ಉದ್ದ $h = \frac{b-a}{n}$ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿವೆ.

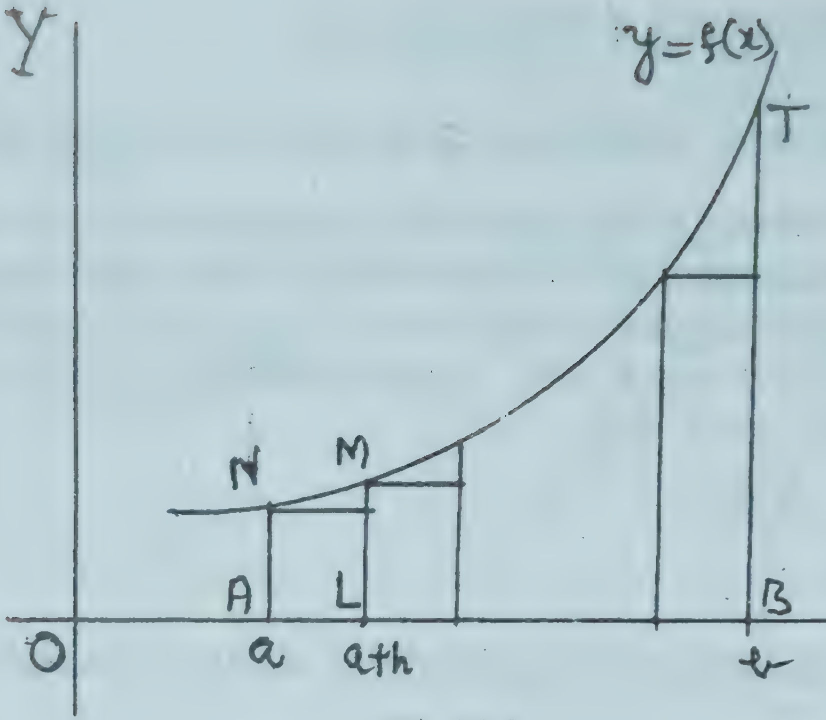
$$AN = f(a),\; AL = h$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(a)$ ಎನ್ನುವುದು $ALMN$ ಆಯದ ಸಲೆ, $h\,f(a+h)$ ಅದರ ಪಕ್ಕದ ಆಯದ ಸಲೆ, $h\,f(a+2h)$ ಅದರ ಪಕ್ಕದ ಆಯದ ಸಲೆ, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಆಯುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾದ ಹಾಗೆಲ್ಲಾ ಅಗಲ h ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಾ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $ABTN$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\lim_{n\to\infty} [hf(a) + h\,f(a+h) + hf\,(a+2h) + \text{----} + hf(a+\overline{n-1}\,h)]$$

ಆಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 14.2

$ABTN$ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \lim_{n\to\infty} h\,[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots f(a+\overline{n-1}\,h)]$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$ (ಮೂಲಪ್ರಮೇಯದಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ $y = f(x)$ ವಕ್ರರೇಖೆ, x– ಅಕ್ಷ ಹಾಗೂ $x = a$, $x = b$ ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ A [ಚಿತ್ರ 14.3 (i)] ಆದರೆ

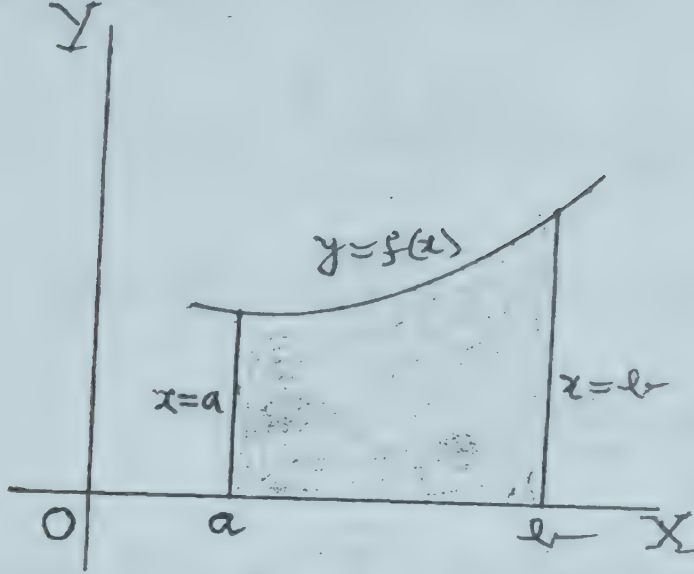
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b y\,dx$$ [ಕಾರಣ $y = f(x)$]

$\therefore$ **ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $A = \int_a^b y\,dx$**

ಸೂಚನೆ: ಇದೇ ರೀತಿ $y = f(x)$ ವಕ್ರರೇಖೆ $y=a$, $y=b$ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು y–ಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$A = \int_a^b x\,dy$ ಆಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 14.3

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $y = 1 - x^2$ ನಕ್ಷೆಯ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   ಈ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯು $x = 1$, $x = -1$ ನಲ್ಲಿ x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore A = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= [1-(-1)] - \frac{1}{3}\,[1^3 - (-1)^3]$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ ಚದರ ಮೂಲ ಮಾನ.}$$

2. $y = x^2 + x + 2$ ನಕ್ಷೆಯ ಕೆಳಗೆ $x = -1$ ರಿಂದ $x = 2$ ವರೆಗೆ ಇರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2+x+2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x^2 \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right)$$

$$= \frac{21}{2}$$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ

3. $y = \cot x$ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ $x = \frac{\pi}{4}$ ನಿಂದ $x = \frac{\pi}{2}$ ವರೆಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

$$A = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \, dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$= \left[\log \sin x \right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \left[\log \sin \frac{\pi}{2} - \log \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log 2$$

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಎಲಿಪ್ಸ್ ಮತ್ತು $x = c$, $x = d$ ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು x – ಅಕ್ಷ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$A = \int_c^d \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_c^d$$

$$= \frac{b}{2a}\left[d\sqrt{a^2-d^2} - c\sqrt{a^2-c^2} + a^2\left(\sin^{-1}\frac{d}{a} - \sin^{-1}\frac{c}{a}\right)\right]$$

ಎಲಿಪ್ಸ್‌ನ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗ ಬರಲು $d = a$, $c = 0$ ಹಾಕಬೇಕು. ಆಗ

$$A = \frac{b}{2a}\left[a\sqrt{a^2-a^2} - 0\sqrt{a^2-0} + a^2\left(\sin^{-1}\frac{a}{a} - \sin^{-1}\frac{0}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{b}{2a}\left(a^2\sin^{-1}1\right)$$

$$= \frac{ba.}{2}\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}$$

ಪೂರ್ಣ ಎಲಿಪ್ಸ್‌ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4 . \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$

5. x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $y^2 = 2ax - x^2$ ಮತ್ತು $y^2 = ax$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾಗಳು (0,0) ಮತ್ತು (a,a) ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನುಕಲದ ಮಿತಿಗಳು $x = 0$ ಮತ್ತು $x = a$.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $A = \int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,dx - \int_0^a \sqrt{ax}\,dx$

ಈಗ, ಮೊದಲನೇ ಅನುಕಲದಲ್ಲಿ

$x = a(1-\cos\theta)$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

ಎರಡನೇ ಅನುಕಲ

$$\int_0^a \sqrt{ax}\, dx = \sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2}{3} a^2$$

$$\therefore A = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2a^2}{3} = a^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

6. **ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ** (ತ್ರಿಜ್ಯ a).

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x^2+y^2=a^2$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $y = \sqrt{a^2-x^2}$

$$A = \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = 2 \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}$$

$$= 2\left[\left(0 + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{a^2}{2}\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{a^2\pi}{2}\right) = \pi a^2 \text{ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ}$$

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πa^2

7. $y = 4x - x^2 - 3$ ವಕ್ರರೇಖೆ ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = 4x - x^2 - 3$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y = 0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$4x - x^2 - 3 = 0$

ಅಥವಾ $x^2 - 4x + 3 = 0$

ಅಥವಾ $(x-3)(x-1) = 0$

ಅಥವಾ $x = 1, \ x = 3$.

ಅಂದರೆ ವಕ್ರರೇಖೆಯು (1,0), (3,0) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

$$A = \int_1^3 (4x - x^2 - 3)\, dx$$

$$= \left[4.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^3$$

$$= (18 - 9 - 9) - \left(2 - \frac{1}{3} - 3\right)$$

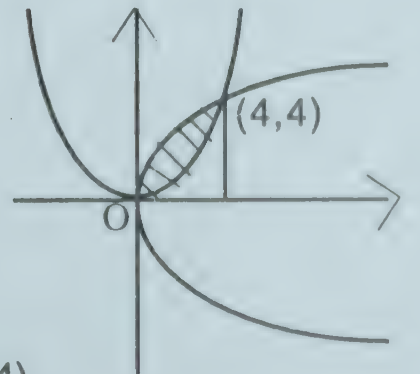
$$= \frac{4}{3}$$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ

8. $y^2 = 4x$ ಮತ್ತು $x^2 = 4y$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ $x = 4$, $y = 4$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $A_1 = \int_0^4 2\sqrt{x}\, dx$

$$= \left[2.\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4$$



(ಚಿತ್ರ 14.4).

$$= \frac{4}{3} (4)^{3/2} = \frac{4}{3} .8 = \frac{32}{3}$$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ

$$A_2 = \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{1}{12} [64 - 0] = \frac{16}{3}$$

ಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= A_1 - A_2$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{16}{3}$$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 14.3

1. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ 1 ರಿಂದ 2 ರವರೆಗೆ ಇರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x = 0$ ಯಿಂದ $x = 1$ ವರೆಗೆ $y = x - x^3$ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $y = x^2$, $y = 0$ ಮತ್ತು $x = 3$ ಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

4. $y = x^3$, $x = 0$ ಮತ್ತು $y = 8$ ಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ?

5. $x^2 y = x^2 + 5$ ರೇಖೆ x ಅಕ್ಷ, $x = 1$ ಮತ್ತು $x = 3$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ?

6. x ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $y^2 = 4-x^2$ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

7. $y=x^2 + 1$, $y = 2x + 1$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

8. $y = \cos x$ ಮತ್ತು $y = \sin x$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ $x = 0$ ಯಿಂದ $x = \frac{\pi}{4}$ ವರೆಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

9. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗಳು, x–ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $y^2 = 4\,ax\ (a>o)\ x = 4, x = 9$

   (ii) $y = 2\cos x - \sin x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$

   (iii) $y = e^{-x/a} + e^{-x/a},\quad x = \pm a$

   (iv) $xy = 1,\ x = 1,\ x = 2$

   (v) $y= x^2 - 5x + 6,\ x=2,\ x=6$

   (vi) $y = \frac{x^2}{x^2+1},\ x = 0,\ x = 1$

10. $y\sqrt{25-x^2} = 12$ ರೇಖೆ ಮತ್ತು $\left(0, \frac{12}{5}\right)$ ಮತ್ತು (4,4) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಜ್ಯಾ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

11. $y(x^2 + 2) = 18$ ಮತ್ತು $y(x+5) = 9$ ಈ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $y(x^2 + 4) - 8 = 0$ ಮತ್ತು $3x^2 - 4y - 8 = 0$ ಈ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

13. $x^2 = 4ay + 4a^2$ ಪ್ಯಾರಾ ಬೊಲಾ ಮತ್ತು $3x + 4y = 0$ ಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

14. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳು, x ಆಕ್ಷ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಭುಜಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)	$y = c \cosh \frac{x}{c}$	$x = 0, \quad x - h$
(ii)	$y = e^x,$	$x = 0, \quad x = h$
(iii)	$y = \log x$	$x = a \quad x = b$
(iv)	$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = \sqrt{a^2 - b^2}, \ x = a$

15. $y = 8 - x^2$ ಮತ್ತು $y = x^2$ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $y = \sin 2x \cos 2x$ ರೇಖೆ, $x-$ ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $y = x^2, y = \sqrt{x}$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ?

18. $y = 2x(3-x)$ ಮತ್ತು $x-$ ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 15

ಸುಲಭ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

15.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನೂ x, y ಇತ್ಯಾದಿ ಚರಗಳನ್ನೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಕಲ್ಪಿಸುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ *ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ* ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಈ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಹಾಂಕದ ದರ್ಜೆ ಯಾವುದಿದೆಯೋ ಅದಕ್ಕೆ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ *ದರ್ಜೆ* (ಆರ್ಡರ್) ಎನ್ನುವರು.

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಇದಯೋ ಆ ಘಾತವನ್ನು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ *ಪ್ರಮಾಣ* (ಮಟ್ಟ, ಡಿಗ್ರಿ) ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0$$

   ದರ್ಜೆ (ಆರ್ಡರ್) = 4

   ಮಟ್ಟ (ಡಿಗ್ರಿ) =1

2. $$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 9x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

   ದರ್ಜೆ = 2, ಮಟ್ಟ=1

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಪ್ರಾಣಿಶಾಸ್ತ್ರ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಅನೇಕ ಪರಿಮಾಣ ಸಂಬಂಧಿ ಕಲ್ಪನೆಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಲಭ್ಯವಿರುತ್ತವೆ. ಇವು ಅನೇಕ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಗುಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಬೇಕು. ಆಗ ಬರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವು ಸ್ಥಿರಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು.

15.2 ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರಚನೆ

ಉದಾಹರಣೆ : $y = mx + c$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಸಮೀಕರಣ.

ಇದನ್ನು ಅವಕಲಿಸಿದರೆ $\frac{dy}{dx} = m$ .... (1)

ಮತ್ತೊಂದು ಸಲ ಅವಕಲಿಸಿದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ .... (2)

ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಅವಕಲನದಿಂದ c ಎಂಬ ಸ್ಥಿರವು ವಿಲೋಪನವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ c ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆ ಇದ್ದರೂ, ಸತ್ಯವಾಗುವ (1) ನೇ ಸಮೀಕರಣ ಒದಗಿದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು c ನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಗುಣ ಯಾವುದೆಂದರೆ, ಆ ರೇಖೆಗಳ ಓಟವು m ಆಗಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಅವಕಲನದಿಂದ c ಮತ್ತು m ಎರಡು ಸ್ಥಿರಗಳೂ ವಿಲೋಪನವಾಗಿವೆ. ಈಗ ಬಂದಿರುವ 2ನೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ಎನ್ನುವುದು m ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಈ ರೇಖೆಗಳ ವಕ್ರತೆ (ಕರ್ವೇಚರ್) ಶೂನ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ಎನ್ನುವುದು ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದಾಯಿತು. ಈ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ (ಸೊಲ್ಯೂಷನ್) $y = mx+c$ ಆಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ, m ಮತ್ತು c ಗಳು ಇಚ್ಛಾನುಸಾರ (ಆರ್ಬಿಟ್ರರಿ) ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಸ್ಥಿರಗಳು.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ, ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸ್ಥಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟೇ ದರ್ಜೆ ಇರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಿಲೋಪನದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾ: $y = mx+c$ ಯಲ್ಲಿ 2 ಸ್ಥಿರಗಳಿವೆ ಮತ್ತು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ದರ್ಜೆಯೂ 2 ಆಗಿದೆ.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1. ತಂಪು ಮಾಡುವ ಬಗ್ಗೆ ನ್ಯೂಟನ್ನಿನ ನಿಯಮ

ಒಂದು ಉಷ್ಣ ವಸ್ತುವು ತಂಪಾಗುವ ದರವು ವಸ್ತುವಿನ ಮತ್ತು ಪರಿಸರದ ಉಷ್ಣತೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_0)$$

2. **ಸರಳ ಸಂಗತ ಚಲನೆ (ಸಿಂಪಲ್ ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಮೋಶನ್)**

(ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದೆ.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

I ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

1. $y^2 = 4ax$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = 4a$$

ಅಥವಾ $2y. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$

$$\therefore 2x \frac{dy}{dx} = y$$

2. $xy = c^2$

$$\therefore x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

3. $x^2 + y^2 = a^2$

$$\therefore 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $x + y \frac{dy}{dx} = 0$

4. $x^2 + y^2 - ax = 0$

$$\therefore 2x + 2y \frac{dy}{dx} - a = 0$$

ಅಥವಾ $2x + 2y \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 + y^2}{x} = 0$

5. $y = ae^{nx} + be^{-nx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = ane^{nx} - bne^{-nx}$$

ಅಥವಾ $\frac{d^2y}{dx^2} = an^2 e^{nx} + bn^2 e^{-nx}$

$$= n^2 (ae^{nx} + be^{-nx})$$

ಅಥವಾ $\frac{d^2y}{dx^2} = n^2 y$

6. $x^2 - y^2 = a^2$

$$\therefore 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $x - y\frac{dy}{dx} = 0$

7. $x^2 = 4by$

$$\therefore 2x = 4b\frac{dy}{dx}$$

ಅಥವಾ $x = 2b\frac{dy}{dx}$ .... (1)

ಈಗ (1) ರಲ್ಲಿ

$$b = \frac{x^2}{4y}$$

ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$x = \frac{2.x^2}{4y} \frac{dy}{dx}$$

ಅಥವಾ $x = \frac{x^2}{2y} \frac{dy}{dx}$

ಅಥವಾ $x\frac{dy}{dx} = 2y$

8. $x^2+y^2-ay=0$

$$\therefore\ 2x+2y\frac{dy}{dx}-a\frac{dy}{dx}=0$$

ಅಥವಾ $2x+\frac{dy}{dx}(2y-a)=0$

9. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$$\therefore\ bx+ay=ab$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$b+a\frac{dy}{dx}=0$$

ಅಥವಾ $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=0$$

10. $y=cx+c^2$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=c$$

ಅಥವಾ $y=\frac{dy}{dx}x+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

II. ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{xd^3y}{dx^3}+\frac{3dy}{dx}+4y=0$

ದರ್ಜೆ 3 , ಪ್ರಮಾಣ 1

(ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2xy\frac{dy}{dx}+y=0$

ದರ್ಜೆ 2, ಪ್ರಮಾಣ 1

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=0$

ದರ್ಜೆ 2, ಪ್ರಮಾಣ 1.

(iv) $\frac{d^3y}{dx^3} + y\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^2 = 0$

ದರ್ಜೆ 3, ಪ್ರಮಾಣ 1

(v) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = a$: ದರ್ಜೆ 1, ಪ್ರಮಾಣ 2

(vi) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y\frac{dy}{dx} = 0$: ದರ್ಜೆ 2, ಪ್ರಮಾಣ 2

(vii) $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)^r + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{dy}{dx} = a$

ದರ್ಜೆ n, ಪ್ರಮಾಣ r

ಅಭ್ಯಾಸ - 15.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪಿಸಿ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $xy = c^2$ ನಲ್ಲಿ c ಯನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

2. $y = mx + \frac{a}{m}$ ನಲ್ಲಿ m ನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ

3. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ಇದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ p ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು x ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವು α.

   (i) α ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ

   (ii) p ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ

   (iii) α ಮತ್ತು p ಎರಡನ್ನೂ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ

4. $y = Ae^{bx}$ ನಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು b ಎರಡನ್ನೂ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ

5. $y = Ax^2 + Bx + C$ ಇಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನೂ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ

6. $y = A\cos mx + B\sin mx$ ನಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನೂ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ

7. $y = A\sin^{-1}x + B$ ನಲ್ಲಿ A, B ಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ.

8. $y = A\log x + B$ ಇದರಿಂದ ಬರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವು

   $$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

   ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $Ax + B = xy$ ಇದರ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $Ax^2 + By^2 = 1$ ಇದರ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15.3 ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ

ಚರಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳಿಲ್ಲದೆಯೇ ತಿಳಿಸುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಅವಕಲನ, ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಈ ಸಮೀಕರಣವು , ಇದರಿಂದ ಹೊಂದುವ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿ (ಸಮಾಧಾನ) ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಚರಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ ಅಥವಾ ಅನುಕಲ ಎನ್ನಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y = A\cos x + B\sin x$, ಎಂಬುದು x, y ಚರಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ. ಇದರಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ಇತ್ಯಾದಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು ಕಾಣಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಈಗ

$$y = A\cos x + B\sin x$$

ಎನ್ನುವುದು.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. (1) ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{dy}{dx} = -A\sin x + B\cos x$$

ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B\sin x = -(A\cos x + B\sin x)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ (1) ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y$$

$$= -A\cos x - B\sin x + A\cos x + B\sin x = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$y = A\cos x + B\sin x$$

ಎನ್ನುವುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎಂದಾಯಿತು.

2. $y = A\cos x + \sin x$ ಎನ್ನುವುದು

$\cos x \frac{dy}{dx} + y\sin x = 1$ ರ ಪರಿಹಾರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y = A\cos x + \sin x \quad \text{.... (1)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -A \sin x + \cos x \quad \text{.... (2)}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $y, \frac{dy}{dx}$ ಗಳಿಗೆ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x$$

$$= \cos x (-A \sin x + \cos x) + (A \cos x + \sin x) \sin x$$

$$= -A \cos x \sin x + \cos^2 x + A \cos x \sin x + \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\therefore y = A \cos x + \sin x$$

ಎನ್ನುವುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ.

3. $Ax^2 + By^2 = 1$ .... (i)

ಎನ್ನುವುದು $x\left[y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dx}{dx}\right)^2\right] - y \frac{dy}{dx} = 0$ .... (ii)

ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, (i) ನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$2Ax + 2By.\frac{dy}{dx} = 0$ ಅಥವಾ $Ax + By\frac{dy}{dx} = 0$ .... (iii)

ಮತ್ತು $A + B\left(\frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx} + y.\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ .... (iv)

ಅಥವಾ $A + B\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0$

ಈಗ, (iii) ಮತ್ತು (iv) ರಿಂದ A, B ಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡೋಣ.

ಸಮೀಕರಣ (vi) ನ್ನು x ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$Ax + Bx\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\ \frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (iii)

$$Ax + By\ \frac{dy}{dx} = 0$$

ಕಳೆದರೆ

$$B\ \left[x\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\,y\frac{d^2y}{dx^2} - y\ \frac{dy}{dx}\right] = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು B ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$x\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\,y\frac{d^2y}{dx^2} - y\ \frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಥವಾ $x\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right] - y\ \frac{dy}{dx} = 0$

ಎಂಬ ದತ್ತ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆದೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

ಎನ್ನುವುದು ದತ್ತ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ.

ಸೂಚನೆ:

ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿದರೆ, ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \qquad \text{.... (1)}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ h ಮತ್ತು k ಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, (1) ನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$2(x-h) + 2(y-k)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ ಅಥವಾ } (x-h) + (y-k)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{...(2)}$$

$$\therefore\ (x-h) = -(y-k)\frac{dy}{dx}$$

ಇದನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ

$$(y-k)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

$$\text{ಅಥವಾ}\quad (y-k)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = a^2 \qquad \text{.... (3)}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈಗ, (2) ನ್ನು ಪುನಃ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$1 + (y-k)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\text{ಅಥವಾ}\quad (y-k) = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad \text{.... (4)}$$

ಫಲಿತಾಂಶ (4) ನ್ನು (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = a^2$$

$$\text{ಅಥವಾ}\quad \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = a^2$$

$$\text{ಅಥವಾ}\quad \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

ಇದು $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ ನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗುಳ್ಳ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 15.2

1. $xy = ce^{x} + be^{-x} + x^2$ ನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $y = Ae^{x} + Be^{3x} + Ce^{5x}$ ನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $y = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$ ನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $y^2 = 4a(x+a)$ ನಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಿ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂಚನೆ:

$f(x, y, c_1, c_2, .., c_n) = 0$ ಇದನ್ನು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು n ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಲೋಪನ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದಕ್ಕೆ $n+1$ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅಗತ್ಯ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು n ಸಲ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರಕುವ n ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಟ್ಟು $(n+1)$ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೂ ಅನುಕಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಪರಿಹಾರದ ವಿಧಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು, "ಚರಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಬಹುದಾದ" ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಸಪರೇಶನ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯಬಲ್ಸ್).

15.4 ಚರಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದಾದ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ dx ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ xನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡ ಉತ್ಪನ್ನವೂ, dy ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ y ನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡ ಉತ್ಪನ್ನವೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$f(x)dx + \phi(y)dy = 0 \quad .... (1)$$

ಈ ರೀತಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು, ಚರಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದಾದ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಇದರ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$$f(x)\ dx = -\phi(y)\ dy$$

ಎಂದು ಬರೆದು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಅನುಕರಿಸಬೇಕು. ಆನಂತರ ಎರಡು ಅನುಕಲಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು.

$$\int f(x)dx + \int \phi(y)dy = c \quad .... (2)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಪರಿಹಾರ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x.\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1$ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು $x\dfrac{dy}{dx} = 1-y^2$

ಅಥವಾ $\dfrac{dy}{1-y^2} = \dfrac{dx}{x}$

ಎಂದು ಬರೆಯುಬಹುದು. ಅನುಕಲಿಸಿದರೆ

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y} = \log x + \log C$

ಅಥವಾ $\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{½} = \log C\,x$

ಅಥವಾ $\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{½} = C\,x$

ಅಥವಾ $\frac{1+y}{1-y} = C^2x^2$

ಇದು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ

2. ಯಾವ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x – ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪ್ರಮಾಣ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಯಾವುದೆ ಬಿಂದು (x, y) ನಲ್ಲಿ

ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $= y\cot\psi = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಷರತ್ತಿನ ಪ್ರಕಾರ

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = n\,x \qquad \text{.... (1)}$$

ಇದನ್ನು ಅನುಕಲಿಸಿದಾಗ

$$\int \frac{n}{y}\,dy = \int \frac{dx}{x}$$

ಅಂದರೆ $n\log y = \log x + \log C$ ಅಥವಾ $y^n = Cx$

ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು x–ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಪರಿಹರಿಸಿ

3. $\sec y = \sec x\,\frac{dy}{dx}$ .... (1)

ಈಗ, $\int \frac{dx}{\sec x} = \int \frac{dy}{\sec y}$ ಅಥವಾ $\int \cos x\,dx = \int \cos y\,dy$

$\therefore\ \sin x = \sin y + C$ ಎಂಬುದು (1) ರ ಪರಿಹಾರ.

4. $\dfrac{x^2+1}{y+1} = xy\dfrac{dy}{dx}$

$\therefore \dfrac{x^2+1}{x}dx = y(y+1)\,dy$

ಅಥವಾ $\int \dfrac{x^2+1}{x} = \int y(y+1)\,dy$

ಅಥವಾ $\int \left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx = \int (y^2+y)\,dy$

ಅಂದರೆ $\dfrac{x^2}{2} + \log x = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^2}{2} + C$

ಇದು ದತ್ತ ಅನುಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ.

5. $x\cos^2 y\,dx = y\cos^2 x\,dy$ .... (1)

$\therefore \int \dfrac{x}{\cos^2 x}dx = \int \dfrac{y}{\cos^2 y}dy$

ಅಥವಾ $\int x\sec^2 x dx = \int y\sec^2 y\,dy$

ಅಥವಾ $x.\tan x - \int \tan x.1\,dx = y\tan y - \int \tan y\,dy$

ಅಥವಾ $x\tan x - \log\cos x = y\tan y - \log\cos y + C$

ಇದು (1) ರ ಪರಿಹಾರ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 15.3

ಈ ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $x\,dx + y\,dy = 0$

2. $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} = 0$

3. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$

4. $xdx - ydy = 0$

5. $\dfrac{dx}{x^2} + \dfrac{dy}{y^2} = 0$

6. $\dfrac{dx}{x^{m+1}} + \dfrac{dx}{y^{n+1}} = 0$

7. $(2x+3)\,dx + (3+2y)\,dy = 0$

8. $(y^2+1)\,dy - (x^2+1)dx = 0$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+x+1}{y^2+y+1}$

10. $(1+e^x)dy + (1+e^y)\,dx = 0$

11. $\sec^2 x\,dx + \sec^2 y\,dy = 0$

12. $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$

13. $\sqrt{1-x^2}\,dx + \sqrt{1-y^2}\,dy = 0$

14. $e^y(1+e^x)dx + e^x(1+e^y)\,dy = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^2-1}$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \cot x.\,\cot y$

17. $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1+x^2}} = 0$

18. $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$

19. $3\,e^x \tan y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$

20. $(x+1)\frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

21. $y(1+x)\,dx + x(1+y)\,dy = 0$

22. $y\sqrt{1+x^2}\,dx + x\sqrt{1+y^2}\,dy = 0$

23. $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}\,dx + x\,y\,dy = 0$

24. $y - x\,y^2 = a\left[y^2 + \frac{dy}{dx}\right]$

25. $\operatorname{cosec}x.\log y\,dy + x^2y^2dx = 0$

26. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + x\cos x}{y(2\log y + 1)}$

27. $x^{-1}\cos^2 y\,dy + y^{-1}\cos^2 x dx = 0$

28. $\cos y.\log(\sec x + \tan x)\,dx$

$= \cos x.\log \operatorname{cosec} y + \tan y)\,dy$

29. $x\sqrt{y}\,dx + (1+y)\sqrt{1+x}\,dy = 0$

30. $(e^x+1)y\,dy = (y+1)\,e^x dx$

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ - 1

1. (3,2)

2. ಹೌದು f ಏಕ ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನ

3. $\{(a,3), (a,5), (b,3), (b,5)\}$

4. $f^{-1}(3) = \{1,2\}$

5. (i) $4x^2 - 2x + 1$

   (ii) 57

   (iii) 9

6. $gof = 4x^2 + 4x - 1$

   $fog = 2x^2 - 3$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2

1. (a) p : ಶಾರದೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಹಾಡುತ್ತಾಳೆ.

   q : ಶಾಂತಲೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ನಾಟ್ಯಮಾಡುತ್ತಾಳೆ, ಆದಾಗ

   ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \wedge q$

   (b) p : ಮಳೆ ಬಂದರೆ

   q : ಬೆಳೆ ಆಗುತ್ತದೆ

   ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \rightarrow q$

2. (a) $\sim p \wedge s$

   (b) $r \rightarrow \sim q$

   (c) $\sim q \rightarrow \sim p \wedge s$

   (d) $p \leftrightarrow q$

3.

p	q	$p \wedge q$	$q \to p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q) \vee (q \leftrightarrow p)$
T	T	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T

4. 1. $\sim p \wedge \sim(q \wedge r)$
   2. $\sim p \vee [q \wedge (\sim r)]$
   3. $\sim p \wedge \sim q$
   4. $\sim p \wedge [\sim p \vee q] \vee [(p \wedge \sim q) \wedge p]$

5. (i) $\sim q \to \sim p,\ p \to q,\ q \to p$
   (ii) $(q \to r) \to p,\ \sim p \to (q \wedge \sim r),\ [q \wedge \sim r] \to \sim p$

7. ವಿಲೋಮ : $x = 6$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $x+1 = 9$

   ಪ್ರತಿಧನ : $x \neq 6$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $x+1 \neq 9$

8. *ABCD* ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ180° ಆಗಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು *ABCD* ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 3.1

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 23 & 11 & 13 \\ 14 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 42 & 9 & 2 \\ 65 & -11 & 0 \end{pmatrix}$

2. $x = 0,\ y = 1$

ಅಭ್ಯಾಸ - 3.2

I 1. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -9 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

II 1. $A^{-1} = \frac{-1}{29}\begin{pmatrix} -11 & -9 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 10 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ 2. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 3.3

I 1. 1, 2, 3 2. 1, 3, –1 3. 1, 1, 1 4. 1, 1, 1

II 1. 1, –2, 1 2. $\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}$ 3. 1, 3, –1 4. $5, \frac{-9}{7}, \frac{2}{7}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 3.4

1. 0, 3, 15

3. (i) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

(iii) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -12 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.1

1. $4\hat{i} + 8\hat{k}$ 2. $(0, -2, 13), \frac{\hat{i}-2\hat{j}+13\hat{k}}{\sqrt{173}}$

3. $-\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}, \frac{3\hat{i}}{2} + \frac{1}{2}\hat{j} + 2\hat{k}$

4. $\vec{a} + 3\vec{b},\ 3\vec{b} - \vec{a},\ 2(\vec{a}+\vec{b}),\ (-\vec{a}-3\vec{b})$

5. $\frac{1}{2}$ 6. $l = -6\ \ m = -1$ 7. $x = -\frac{1}{3}\ y = \frac{4}{3}$

8. $\frac{1}{\sqrt{6}}[-2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}]$

9. $7, \frac{\pi}{3}$ 10. -15 11. -3

16. $3\hat{i}+23\hat{j}-\hat{k}$ 17. $(1, -3, -5)$

18. $\sin\theta = \left[\frac{155}{156}\right]^{½}, \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{155}}[-3\hat{i}+5\hat{j}+11\hat{k}]$

19. $\frac{\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{3}}, \sin\theta = \frac{2}{7}$

21. $-3\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}$ 22. $-20\hat{i}-6\hat{j}-22\hat{k}$ 23. $5\sqrt{3}$

24. $5\sqrt{5}$ 25. $\frac{\sqrt{35}}{2}$ 26. $\frac{1}{2}\sqrt{107}$

28. (i) 21 (ii) 7 (iii) 10 30. –4 32. 0

38. –24 39. $\frac{1}{\sqrt{270}}[11\hat{i}-10\hat{j}-7\hat{k}]$ 40. 0

ಅಭ್ಯಾಸ - 4.2

1. 9 2. 13 3. 40 4. 20

5. 33 6. $-8\hat{i}+22\hat{j}+2\hat{k}$

7. $6(2\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k})$ 8. $2\hat{i}-7\hat{j}-2\hat{k}$ 9. $2\hat{i}-4\hat{j}-12\hat{k}$

10. $-8\hat{i}+9\hat{j}+14\hat{k}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 5

1. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಅಲ್ಲ (iv) ಹೌದು
(v) ಹೌದು (vi) ಅಲ್ಲ

2. (ii) ಅಲ್ಲ (iii) –5, –10–a (iv) 1, –2 (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (vii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (viii) –2 (ix) 7 (x) 2

(xi) 11 (xii) 2 (xiv) 4, 2 (xv) $d*c*b*a^{-1}$

(xvi) abc^{-1} (xvii) 9 (xviii) 9 (xix) –5

(xx) 1

3. ಅಲ್ಲ 4. ಹೌದು 5. ಅಲ್ಲ 6. ಹೌದು

14. (i) ಹೌದು (ii) ಅಲ್ಲ (iii) ಹೌದು (iv) ಹೌದು
(v) ಹೌದು (vi) ಅಲ್ಲ (vii) ಹೌದು (viii) ಹೌದು

18. ಅಲ್ಲ. 19. {1}, {1,-1}, {1,-1,i}

20. H_1 - ಉಪಸಮೂಹ H_2 - ಉಪಸಮೂಹವಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

I 1. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$

2. $x^2 + y^2 + 10y - 11 = 0$

II 1. $\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, 2

2. $\left(\frac{-2}{5}, \frac{4}{5}\right)$, 2

III 1. $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 16x + 4y - 32 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

5. $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0$

6. $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$

9. $\left(\frac{1}{13}, \frac{-21}{13}\right)$

10. $4x^2 + 4y^2 - 4cx - 4cy + c^2 = 0$

12. $2x^2 + 2y^2 - x - 47 = 0$

13. (4,3), (4,3); ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

14. $5x^2 + 5y^2 - 8x - 14y - 32 = 0$

15. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

1. $3x + 4y = 0$
2. $y = x + 3$ ಮತ್ತು $y = x - 5$
3. $3x - 4y = 21$ ಮತ್ತು $4x + 3y = 3$
4. $(3, -1)$
5. $x \pm y = \pm 2\sqrt{2}$
6. $4x + 3y = 25$, $4x + 3y + 5 = 0$ ಮತ್ತು

   $3x - 4y + 20 = 0$, $3x - 4y = 10$
7. $(2,1)$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.3

2. $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 2 = 0$
3. 4 ಮಾನಗಳು
4. $\sqrt{c_1 - c}$
5. $\left(\frac{-11}{3}, 0\right), \frac{10}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.4

1. $4x + y - 1 = 0$
2. $7x + 3y + 3 = 0$
3. $12x + 8y - 13 = 0$
4. $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$
5. $(-2, -1)$
6. $x - y = 0$

7. $3x + 4y + 7 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.5

2. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 6x - 3y = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 10x - 36y + 52 = 0$
5. $x^2 + y^2 = 1$ ಮತ್ತು $4(x^2+y^2) - 15x - 4 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 2 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 43 = 0$
8. $2(g_1-g_2)x + 2(f_1-f_2)y + c_1-c_2 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.6

2. (i) $(-1, 1)\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$

   (ii) $(1, 2)$ $(3, 1)$

   (iii) $(1,2)$ $(-2, 3)$

3. $x + y + 4 = 0, (-5,-6)$
4. $(-2, -1)$

ಅಭ್ಯಾಸ - 7.1

I	ನಾಭಿ	ಶೃಂಗ	ನಾಭಿಲಂಬದ ತುದಿಗಳು	ಚಾಲಕಗಳು
1.	$(5,0)$	$(0,0)$	$(5, \pm 10)$	$x = -5$
2.	$\left(0, -\frac{1}{6}\right)$,	$(0,0)$,	$\left(\pm\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$	$y = \frac{1}{6}$
3.	$\left(\frac{-3}{2}, 1\right)$,	$\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$,	$\left(\frac{-3}{2}, \pm 2\right)$	$2x+1 = 0$

II 1. $8x^2 = y$

2. $x^2 + 2xy + y - 22x + 18y + 25 = 0$

3. $(2, \pm 4)$

4. $(y-3)^2 = 8(x-4)$ ಅಥವಾ $(y-3)^2 = -8(x-8)$

5. $(x-1)^2 = 16(y-5)$ ಅಥವಾ $(x-1)^2 = -16(y+3)$

ಅಭ್ಯಾಸ - 7.2

1.	ನಾಭಿ ಬಿಂದುಗಳು	ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ	ಚಾಲಕಗಳು
(i)	$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$,	$\frac{1}{\sqrt{3}}$,	$\sqrt{2x} = \pm\sqrt{3}$
(ii)	$\left(\pm\sqrt{6}, 0\right)$,	$\frac{\sqrt{3}}{5}$,	$x = \pm\sqrt{6}$
(iii)	(0,5) (0,1),	$\frac{2}{3}$,	$2y = \pm 9$
(iv)	(2,–1), (–2,–1) ,	$\frac{1}{\sqrt{5}}$,	$x = \pm 10$

2. $7x^2 + 7y^2 + 2xy - 50x + 34y + 103 = 0.$

3. $10x^2 + 3y^2 = 187$

4. $\frac{1}{2}$, 3

5. $31x^2 - 2xy + 31y^2 - 66x + 126y + 127 = 0$

6. $20x^2 + 36y^2 = 405$

7. $3x^2 + 4y^2 = 12$

8. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

ಅಭ್ಯಾಸ - 7.3

1. $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 14y - 22 = 0$

2. $15x^2 - y^2 + 8x - 16 = 0$

3. (i) 6, 8, $(\pm 5, 0), \frac{5}{3}$ $10\frac{2}{3}$

   (ii) 6, 4, $(\pm\sqrt{13}, 0), \frac{\sqrt{13}}{3}, 2\frac{2}{3}$

   (iii) $4\sqrt{6}$, 10, (0, ±7) $\frac{7}{2\sqrt{6}}, \frac{25}{\sqrt{6}}$

   (iv) $4\sqrt{3}$, 4, (6,–1) (–2,–1), $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}$

   (v) 8, 6, (1, –1) (–9,–1), $\frac{5}{4}, \frac{9}{2}$

4. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

6. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

7. $5x^2 - 4y^2 = \frac{80}{9}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 7.4

1. $x - y + 2 = 0$ $\quad$ $x + y - 6 = 0$

2. $2x + 3y + 9 = 0$

3. $8x + 12y + 27 = 0$

4. $4x - 5y + 13, 5x + 4y - 30 = 0$

5. $2x - 3y - 18 = 0, \ 3x + 2y - 1 = 0$

7. $3x + y = \pm 2\sqrt{37}$

8. $x - y - 3 = 0, \ \ x + y - 9 = 0$

9. $\sqrt{13}\,x - 3y \pm 9 = 0, \ \sqrt{13}\,x + 3y \pm 9 = 0$

10. $2y = x \pm 4$

ಅಭ್ಯಾಸ - 8

I

1. $\frac{-\pi}{2}$ 2. $\frac{-1}{2}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{4}{3}$

5. $\frac{24}{25}$ 6. $\frac{\pi}{2}$ 7. $\frac{3}{5\sqrt{34}}$ 8. $\frac{\pi}{4}$

9. 130° 10. -15° 11. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 12. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

13. 170° 14. $\frac{297}{425}$

III.

1. 13 2. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\sqrt{3}$

5. $0, \pm\frac{1}{2}$ 6. 1 7. 3 8. $\frac{a-b}{1+ab}$

9. $\frac{\pi}{4}$ 10. $4\sqrt{\frac{3}{7}}$ 11. $\pm\frac{1}{2}$

12. $x^2 = \frac{1}{10+4\sqrt{2}}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 9

I

1. $n\pi + (-1)^n \left(\frac{-\pi}{3}\right)$ 2. $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

3. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 4. $n\pi \pm (-1)^n \left(\frac{\pi}{3}\right)$

5. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ 6. $n\frac{\pi}{3} + (-1)^n - \left(\frac{-\pi}{12}\right)$

7. $\frac{n\pi}{4}, \left(\frac{2n+1}{10}\right)\pi$ 8. $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{5},\ 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

9. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{9}$ 10. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

II

1. $\frac{2}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n\pi$

2. $\left(n \pm \frac{1}{4}\right)\pi,\ 2\left(n \pm \frac{1}{2}\right)\pi$ 3. $\left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\pi$

4. $n\pi + (-1)^n \left(\frac{-\pi}{6}\right),\ n\pi + (-1)^n \left(\frac{-\pi}{2}\right)$

5. $n\pi + \frac{\pi}{4},\ n\pi + \frac{\pi}{3}$ 6. $2n\pi,\ 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

7. $2n\pi \pm 2\frac{\pi}{3}$ 8. $\frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8},\ n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

9. $2n\pi,\ 2n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$

10. $n\pi - \frac{\pi}{4},\ n(180^\circ) + 63^\circ\ 26'$

11. $n\pi,\ n(180^\circ) + 67^\circ 30'$

12. $n\pi + \frac{\pi}{4},\ n(180^\circ) + 26^\circ\ 34'$

13. $2n\pi, 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$ 14. $n\pi + (-1)^n \frac{3\pi}{4}$

15. $2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ 16. $2n\pi, 2n\pi \pm 50° 29'$

17. $x + 38° 40' = 2n\pi \pm 20° 37'$ 18. $n\pi + 43° 10'$

19. $2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ 20. $(2n+1)\frac{\pi}{8}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{9}$

21. $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ 22. $\frac{n\pi}{6}, \frac{n\pi}{9}$

23. $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 24. $2n\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

25. $\frac{(2n+1)\pi}{10}, \frac{(2n+1)\pi}{2}$ 26. $\frac{(2n+1)\pi}{4}, n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

27. $n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

28. $2n\pi + \frac{\pi}{12}, 2n\pi - \frac{7\pi}{12}$

29. $2n\pi + \frac{5\pi}{4}, 2n\pi - \frac{3\pi}{4}$

30. $\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12}, \frac{n\pi}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 10

1. (i) $8 - i$ (ii) $\frac{8}{25} - \frac{6i}{25}$ (iii) $-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$ (iv) $0 - 5i$

(v) $0 - 2i$

2. (i) $2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ (ii) $1\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

(iii) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ (iv) $8[\cos\pi + i\sin\pi]$

(v) $1\left[\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right]$

3. (i) $-8-8i\,3$ (ii) $-32i$ (iii) $-16\sqrt{3}-16i$ (iv) $-i$ (v) 14

4. (i) -1 (ii) $\sin 9\alpha - i\cos 9\alpha$ (iii) -1 (iv) 1

(v) -1 (vi) $\cos\dfrac{3\pi}{16}+i\sin\dfrac{3\pi}{16}$

12. (I) $2^{1/6}\ \cos\left(\dfrac{8n\pi+3\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{8n\pi+3\pi}{12}\right)$, $n=0, 1, 2$

(ii) $12^{1/3}\left[\cos\dfrac{(6n+1)\pi}{3}+i\sin\dfrac{(6n+1)\pi}{3}\right]$, $n=0, 1, 2$

(iii) $\cos\left(\dfrac{2n\pi+\pi}{8}\right)+i\sin\left(\dfrac{2n\pi+\pi}{8}\right)$, $n=0, 1, 2, 3$

(iv) $\dfrac{1\pm\sqrt{3i}}{2}$, -1 (v) $8^{1/8}\left[\cos\dfrac{8n\pi-3\pi}{16}+i\sin\dfrac{8n\pi-3\pi}{16}\right]$

$n=0, 1, 2, 3$

(vi) $2^{1/3}\left[\cos\dfrac{6n\pi-\pi}{9}+i\sin\dfrac{6n\pi-\pi}{9}\right]$, $n=0, 1, 2.$

13. (i) $\pm i.\ \pm i, \pm 1$ (ii) $\pm 1, \pm i,$ $\left(\cos\dfrac{(2n+1)}{5}\pi+i\sin\dfrac{(2n+1)}{5}\pi\right)$

$n=0, 1, 2, 3, 4.$

(iii) $\cos\left(\dfrac{6n\pi+\pi}{18}\pm i\sin\dfrac{6n\pi+\pi}{18}\right)$, $n=0, 1, 2, 3, 4, 5.$

14. 1

16. $\cos\left(\dfrac{24n\pi+5\pi}{72}\right)+i\sin\left(\dfrac{24n\pi+5\pi}{72}\right)$

$n=0, 1, 2, 3, 4, 5.$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.1

I 1. ಎಲ್ಲಾಬೆಲೆ

2. $x = 1$ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆ

3. ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆ

4. ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆ

5. ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆ

II (i) $x = \frac{2}{3}$, (ii) $x = -1$ (iii) $n\pi$ (iv) $x \pm 4$ ಮತ್ತು $x = \pm 1$

(v) $(2n+1)\frac{\pi}{6}$

III (i) ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಆಗಿದೆ (ii) ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಆಗಿಲ್ಲ (iii) ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಆಗಿಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.2

1. 1, $20x^{19}$, $-x^{-2}$, $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{-5}{6}x^{-11/6}$

$-\frac{5}{4}$, $x^{-9/4}$, $-\frac{1}{3}$, $x^{-4/3}$, $\frac{5}{2}x^{-1/6}$, $\frac{2}{3}x^{-2/3}$

2. $\frac{1}{x}$, $7x^6$, $30x^{-4}$, $\frac{-1}{2}x^{-3/2}$, $\frac{-6}{5}x^{-8/5}$

3. a

4. m

5. $2e^x + 2bx$

6. $-b$

7. $-\dfrac{1}{a}$

8. $\dfrac{3}{x} + 3e^x + 3qx^2$

9. $ae^x - 7x^{-8} - 5x^{-6}$

10. $2ax + b$

11. $2x - \dfrac{2}{x^3}$

12. $\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$

13. $3x^2+3a^2+6ax$

14. $3x^2-3a^2+6ax$

15. $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

16. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x^{3/2}}$

17. $2x + l + m$

18. $3x^2+2x(p+q+r) + (pq+qr+rp)$

19. $\dfrac{-2}{(1+x)^2}$

20. $\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

21. $\dfrac{x^2+2x-2}{(1+x)^2}$

22. $\dfrac{x^2-2x-2}{(1+x+x^2)^2}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.3

1. $1-\sec^2 x$

2. $x \sec^2 x + \tan x$

3. $\dfrac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$

4. $-\sqrt{x}\,\text{cosec}^2 x + \dfrac{\cot x}{\sqrt{x}}$

5. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \text{cosec}^2 x$

6. $\dfrac{x + \cos x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}$

7. $\dfrac{1}{a} \sec x \tan x$

8. $a \sec x \tan x$

9. $\dfrac{(2x \log x \sec^2 x + \tan x + \log \tan x)}{2\sqrt{x}}$

10. $\dfrac{\cot x\,(2+\log x) + 2x \log x\,\text{cosec}^2 x}{2\sqrt{x}\,\cot^2 x}$

11. $e^x \left[\dfrac{\sin x}{x} + (\log x) \cos x + \sin x \log x\right]$

12. $\dfrac{\text{cosec}\,x\,[-3\cot x\,(3+5\cot x) + 5\,\text{cosec}\,x\,(5+3\,\text{cosec}\,x)]}{(3 + 5\cot x)^2}$

13. $\dfrac{(a^2-b^2) \sin x}{(b + a \cos x)^2}$

14. $-4 \cot 2x\,\text{cosec} 2x$

15. $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

16. $\frac{e^x}{\log_e a}[x^{-1} + \log_e x]$

17. $\frac{(1-x^{2)} \cos x}{x} - (1-x^2)(\log_e x)\sin x - 2x\cos x \log x$

18. $-\log_e a / x(\log_e x)^2$

19. $\frac{-4}{\pi^2}$

20. $f'(0) = 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

23. $e^x \operatorname{cosech} x\,(1-\coth x)$

24. $\frac{e^x[1+\cosh x)(x+1) - x\sinh x]}{(1+\cosh x)^2}$

25. $\frac{-2\operatorname{sech}^2 x}{(1+\tanh x)^2}$

26. $\frac{\sinh x - x\cosh x}{\sinh^2 x}$

27. $\frac{1}{1+\cosh x}$

28. $e^x(\sinh x + \cosh x) + x^{-1}(x\sinh x \log x + \cosh x)$

29. $e^x(\operatorname{sech}^2 x + \tanh x)$

30. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\operatorname{secs}^2 x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\tanh x$

31. $\frac{(x^2+1)(x+2)\cosh x + \sinh x(1-x^2-4x)}{(1+x^2)^2}$

32. $e^x \operatorname{cosech} x\,(1-\coth x)$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.3

1. $1-\sec^2 x$

2. $x\sec^2 x + \tan x$

3. $\dfrac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x}$

4. $-\sqrt{x}\,\mathrm{cosec}^2 x + \dfrac{\cot x}{\sqrt{x}}$

5. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \mathrm{cosec}^2 x$

6. $\dfrac{x + \cos x\sin x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}$

7. $\dfrac{1}{a}\sec x\tan x$

8. $a\sec x\tan x$

9. $\dfrac{(2x\log x\sec^2 x + \tan x + \log\tan x)}{2\sqrt{x}}$

10. $\dfrac{\cot x\,(2+\log x) + 2x\log x\,\mathrm{cosec}^2 x}{2\sqrt{x}\cot^2 x}$

11. $e^x\left[\dfrac{\sin x}{x} + (\log x)\cos x + \sin x\log x\right]$

12. $\dfrac{\mathrm{cosec}\,x\,[-3\cot x\,(3+5\cot x) + 5\,\mathrm{cosec}\,x\,(5+3\,\mathrm{cosec}\,x)]}{(3+5\cot x)^2}$

13. $\dfrac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$

14. $-4\cot 2x\,\mathrm{cosec}\,2x$

15. $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

16. $\dfrac{e^x}{\log_e a}[x^{-1} + \log_e x]$

17. $\dfrac{(1-x^{2)}\cos x}{x} - (1-x^2)(\log_e x)\sin x - 2x\cos x\log x$

18. $-\log_e a / x(\log_e x)^2$

19. $\dfrac{-4}{\pi^2}$

20. $f'(0) = 0, f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$

23. $e^x \operatorname{cosech} x\,(1 - \coth x)$

24. $\dfrac{e^x [1+\cosh x)(x+1) - x\sinh x]}{(1+\cosh x)^2}$

25. $\dfrac{-2\operatorname{sech}^2 x}{(1+\tanh x)^2}$

26. $\dfrac{\sinh x - x\cosh x}{\sinh^2 x}$

27. $\dfrac{1}{1+\cosh x}$

28. $e^x(\sinh x + \cosh x) + x^{-1}(x\sinh x\log x + \cosh x)$

29. $e^x(\operatorname{sech}^2 x + \tanh x)$

30. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\operatorname{secs}^2 x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\; x \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\tanh x$

31. $\dfrac{(x^2+1)(x+2)\cosh x + \sinh x(1-x^2-4x)}{(1+x^2)^2}$

32. $e^x \operatorname{cosech} x\,(1 - \coth x)$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.4

1. $a \cos ax$

2. $\frac{a}{b} \cos \frac{ax}{b}$

3. $\frac{\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$

4. $2x^2 \cos x^2 + \sin x^2$

5. $3a\, x^4 \cos ax^3 + 2x \sin ax^3$

6. $-\ a \sin ax$

7. $-\frac{1}{a} \sin \frac{x}{a}$

8. $-2x^2\ \sin (x^2+1) + \cos (x^2+1)$

9. $-3x^4 \sin (1+x^3) + 2x \cos (1+x^3)$

10. $2\sin x \cos x$

11. $-2 \cos x \sin x$

12. $-\sin^3 x + 2 \cos^2 x \sin x$

13. $\cos^2 x (\cos^2 x - 3\sin^2 x)$

14. $\sec^4 x + 2 \tan^2 x \sec x$

15. $m \sec^2 mx$

16. $-a\ \text{cosec}^2\ ax$

17. $a \sec ax \tan ax$

18. $-m\ \text{cosec}\ mx \cot mx$

19 $\frac{2(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\cos^3 x \sin^3 x}$

20. $m e^{m \sin x} \cos x$

21. $\frac{m}{2\sqrt{x}} e^{m \tan \sqrt{x}} \sec^2 \sqrt{x}$

22. $\dfrac{-bm \sin x\, e^{m\cos x}}{a+be^{m\cos x}}$

23 $\dfrac{1+2\log x}{2\sqrt{\log x}}$

24. $\dfrac{\cos(\log x)}{x}$

25. $\cot x$

26. $n x^{n-1} \cot x^n$

27. $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

28. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

29. $\dfrac{\cot x}{2}$

30. $\dfrac{2}{\sin 2x}$

31. $n x^{n-1} \cot x^n$

32. $\dfrac{1}{2x}$

33. $\dfrac{5}{x}$

34. $\dfrac{\sec^2(\log x)}{x}$

35. $\dfrac{-\sin(\log x)}{2x\sqrt{\cos(\log x)}}$

36. $\dfrac{-\tan\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$

37. $3e^{3x}$

38. $e^{\sin x}\cos x$

39. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

40. $\dfrac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$

41. $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

42. $na\,(ax+b)^{n-1}$

43. $2nx\,(x^2+a)^{n-1}$

44. $\dfrac{-2a}{3\,(a+x)^{2/3}(a-x)^{4/3}}$

45 $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}$

46. $m\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x - n\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x$

47. $\dfrac{m\cos^2 x + n\sin^2 x}{\sin^{1-m}x\cos^{n+1}x}$

48. $n^3 x^{n-1}\sin^{n-1}(nx^n)\cos(nx^n)$

49. $\dfrac{e^{\sqrt{\sin x}}\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

50. $\dfrac{4x}{1-x^4}$

51. $\dfrac{3e^{5x}+6e^{2x}+3e^{x}}{(1+e^{-x})^2}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.5

1. $\dfrac{2x}{1+x^4}$

2. $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

3. $\dfrac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$

4. $\dfrac{-\sec^2 x}{\tan x}$

5. $\dfrac{a}{a^2+x^2}$

6. $\dfrac{2}{1+x^2}$

7. $\dfrac{pqx^{p-1}(\tan^{-1}x^p)^{q-1}}{1+x^{2p}}$

8. $\dfrac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}} + (\sin^{-1}x)\sec^2 x$

9. $\dfrac{2}{\sin 2x - \sqrt{\tan^2 x - 1}}$

10. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x+1}$

11. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} + e^x \sin^{-1}x$

12. $\dfrac{me^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x$

14. $e^x \cos^{-1}x - \dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\dfrac{me^{m\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

16. $\dfrac{-m\tan\sqrt{x}\; e^{m\sin^{-1}\log\cos\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{\{1-(\log\cos\sqrt{x})^2\}}}$

17. $\dfrac{bme^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}\,(a+be^{m\sin^{-1}x})}$

18. $\dfrac{3me^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)\,(4+3e^{m\tan^{-1}x})}$

19. $m\,(x\sin^{-1}x)^{m-1} \left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x\right]$

20. $n(x+\cos^{-1}x)^{n-1} \left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

21. $\dfrac{\cos\alpha}{1+2x\sin\alpha+x^2}$

22. $\dfrac{-\sin\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2}$

23. $e^{x\cos^{-1}e+e\cos^{-1}x}\left[\cos^{-1}e - \dfrac{e}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

24. $e^{m\sin^{-1}\sqrt{x}}\left[\dfrac{m\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} + 1\right]$

25. $\dfrac{2\sec^{-1}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

26. $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{cosec}^{-1}x} + \dfrac{1}{2\sqrt{\log x}}$

27. $\dfrac{-me^{m\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

28. $\dfrac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2+(a+b\cos x)^2}$

29. $\dfrac{a}{(ac-b^2)+(ax+b)^2}$

30. $-\dfrac{1}{ax^2-2bx+c}$

31. $\dfrac{2}{x^2+1}$

32. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

33. $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

34. $-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

35. $\dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$

36. $\dfrac{-1}{1+x^2}$

37. $\dfrac{-1}{1+x^2}$

38. $\dfrac{\sin\alpha}{1+x^2+2x\cos\alpha}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.6

1. $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\dfrac{2}{1+x^2}$

3. $\dfrac{3}{1+x^2}$

4. $\dfrac{2a^2x}{a^4+x^4}$

5. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \dfrac{1}{1+x^2}$

6. $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

7. $\dfrac{3a}{a^2+x^2}$

8. $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

9. -1

10. $\dfrac{-2}{1+x^2}$

11. $\dfrac{1}{2}$

12. $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\cos^{-1}x)^2}}$

13. $\dfrac{2a}{\sqrt{(1-a^2x^2)}}$

14. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

17. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

18. $\dfrac{2}{1+x^2}$

19. $\dfrac{2}{1+x^2}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.7

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$

2. $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{x^2+2x}}$

3. $\dfrac{-\operatorname{cosec} x \cot x}{\sqrt{1+\operatorname{cosec}^2 x}}$

4. $\dfrac{me^{m}\sinh^{-1x}}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $\dfrac{e^{\cosh^{-1}x}}{\sqrt{x^2-1}}$

6. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \cosh^{-1}x$

7. $1+\dfrac{x\sinh^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}$

8. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

9. $\dfrac{3x^2}{1-x^6}$

10. $\dfrac{mxe^{m\sinh^{-1}x}}{\sqrt{1+x^2}}+e^{m\sinh^{-1}x}$

11. $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$

12. $\dfrac{4x}{\sqrt{(2x^2-3)^2-25}}$

13. $\dfrac{1}{2}$

14. $\dfrac{1}{2\cos x}$

15. $\dfrac{1}{2(1-x)\sqrt{x}}$

16. $\dfrac{3\sqrt{x}}{4(1-x^3)\sqrt{\tanh^{-1}\sqrt{x^3}}}$

17. $\dfrac{6x(\tanh^{-1}x^2)^2}{1-x^4}$

18. $\dfrac{-m\tanh^{m-1}\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{1+x}}$

19. $\dfrac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\tanh^{-1}\sqrt{x}}(1-x)}$

20. $\dfrac{1}{2(1-x^2)\sqrt{1+\tanh^{-1}x}}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.8

A.

1. $\dfrac{2x(y-6x^2)}{6y^2-x^2}$

2. $-\dfrac{ax+hy}{hx+by}$

3. $-\dfrac{ax+hy+g}{hx+by+f}$

5. $-\dfrac{x^2}{y^2}$

6. $-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}$

7. $\dfrac{y}{e^y-x}$

8. $-\dfrac{(xy^{y-1}+y^x \log y)}{(x^y \log x + xy^{x-1})}$

9. $-\dfrac{(y+x\log y)\,y}{(x+y\log x)\,x}$

10. $\dfrac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$

11. $-\dfrac{x^3(4y+5x)}{x^4+3y^2}$

12. $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$

13. $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

14. $\dfrac{a\sin mx}{b\cos my}$

15. $\frac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}$

16. $-\frac{(\sin y + y\cos x)}{x\cos y + \sin x}$

17. $-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$

18. $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

19. $\frac{2(y-1)}{2\sqrt{y}-a\sqrt{x}}$

B.

1. $x^{x^2+1}(\log ex^2)$

2. $x^{\tan x}\left[\sec^2 x \log x + \frac{\tan x}{x}\right] + (\sin x)^{\cos x}\{-\sin x \log \sin x + \cos x \cot x\}$

3. $x^{x^x}\ x^x\left[(\log x)^2 + \log x + \frac{1}{x}\right]$

4. $(\tan x)^{\cot x}\{-\operatorname{cosec}^2 x \log \tan x + \operatorname{cosec}^2 x\}$
$+ (\cot x)^{\tan x}\{\sec^2 x \log \cot x - \sec^2 x\}$

5. $x^{\log x \log(\log x)}[2\log(\log x)+1]\frac{\log x}{x}$

8. $e^{e^x}\, e^x$

9. $e^{x^x}\ x^x \log ex$

10. $x^{e^x}\ e^x \quad \log(xe^{1/x})$

11. $x^x \log ex \quad - x^{1/x-2}\log\frac{x}{e}$

12. $-y.\cot x\,(1+2\operatorname{cosec}^2 x \ \log\cos x)$

13. $-y\left\{\dfrac{\log \cot^{-1}x}{x^2}+\dfrac{1}{x(1+x^2)\cot^{-1}x}\right\}$

14. $\dfrac{\log \sin y + y\tan x}{\log \cos x - x\cot y}$

15. $\dfrac{y^2}{x-xy\log x}$

17. $\dfrac{y\log y}{x\log x}\quad\dfrac{(1+x\log x\log y)}{1-x\log y}$

18. $-\sin(x^x)[x^x(1+\log x)]$

19. $y\left[\dfrac{2x^2}{x^2+a^2}+\log(x^2+a^2)\right]$

20. $\log 2\,(2^x-2^{-x})$

C.

1. $-\tan t$

2. $\tan t$

3. 0

4. $\tan t$

5. $\cot t/2$

6. $\cot t$

7. $\dfrac{t^4+2t^2-1}{4t}$

8. $\dfrac{t(3+t^2)}{2}$

9. $\dfrac{-b(1-t^2)}{2at}$

10. $\dfrac{1}{t}$

11. $-\dfrac{1}{t^2}$

12. $\dfrac{1}{1-t^2}$

13. $-\tan^2\theta$

14. $\coth t$

15. $-\tan 3t\, e^{\cos^{3t}-\sin^{3t}}$

16. $\dfrac{b}{a}$

17. $\dfrac{t\tan t}{\sin(\log t)}$

18. $\dfrac{b}{a\sin\theta}$

D.

1. $\dfrac{1}{2x^2\log_e 10}$

2. $-(1+a^2\cos^2 bx)\,(x^2+ax+a^2)^{n-1} \times \dfrac{[(n(2x+a)\log\cot x/2 - \operatorname{cosec} x\,(x^2+ax+a^2)]}{ab\sin bx}$

3. $[x^4-\sqrt{1-x^4}\,(1+\sqrt{1-x^4})]/x^6$

4. $\dfrac{2}{x}$

5. $x^{(\sin^{-1}x-1)}(x\log x+\sqrt{1-x^2}\,.\,\sin^{-1}x)$

6. $\dfrac{2[n(1+x^2)\tan^{-1}x.\log\tan^{-1}x+x]}{(1+x^2)\tan^{-1}x\,(\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-3\sin\sqrt{x})}\,.\,x^{2n+3/2}$

7. $-(\log x)^{\tan x}\left[\sec^2 x\,\log(\log x)+\dfrac{\tan x}{x\log x}\right].\,\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{m\cos(m\cos^{-1}x)}$

8. $\dfrac{1}{x(2x^2-1)}$

9. $\tan x \sec^2 x$

10. $(\sin x)^x (x\cot x + \log\sin x)$

11. $\dfrac{1}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 11.9

10. $\dfrac{-8t^3}{(t^2-1)^3}$

11. $\dfrac{-2\cos^3\theta.\sin\theta}{a}$

14. $\dfrac{\sec^3\theta}{a\theta}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 12.1

1.

	ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ	ಲಂಬರೇಖೆ
(i)	$Yy = 2a(X+x)$	$\dfrac{X-x}{2a} + \dfrac{Y-y}{y}$
(ii)	$\dfrac{Xx}{a^2} + \dfrac{Yy}{b^2} = 1$	$\dfrac{a^2X}{x} - \dfrac{b^2Y}{y} = a^2-b^2$
(iii)	$\dfrac{X}{x} + \dfrac{Y}{y} = 2$	$\dfrac{X}{x} + \dfrac{Y}{y} = 2$
(iv)	$Y-y = (\cot x)(X-x)$	$Y-y = (-\tan x)(X-x)$
(v)	$X(x^2-ay) + Y(y^2-ax) = axy$	$(X-x)(y^2-ax)+(Y-y)(ay-x^2)$

2. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಲಂಬರೇಖೆ

	ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ	ಲಂಬರೇಖೆ
(i)	$2x + 3y - 30 = 0$	$3x - 2y - 19 = 0$
(ii)	$2x + 15y - 62 = 0$	$15x - 2y - 7 = 0$
(iii)	$4x - 5y + 12 = 0$	$5x + 4y - 26 = 0$
(iv)	$6x - 6y = \pi - 3\sqrt{3}$	$6x + 6y = \pi + 3\sqrt{3}$
(v)	$y = 12x - 16$	$x + 12y = 98$

3. (2,8) ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $2x - y + 4 = 0$

4. $2x - y = 3$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, $(1, -1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

6. $y = \dfrac{x}{t} + at$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ

$y + xt = 2at + at^3$ ಲಂಬರೇಖೆ

7. $3\sqrt{10}x - 2y - 18 = 0$;

$6x + 9\sqrt{10}y - 13\sqrt{10} = 0$

8. $(3,-22), (-1,10)$

9. $6x + 3y - 5 = 0,\ x - 2y + 5 = 0$

10. (2,2) ನಲ್ಲಿ $\theta_1 = \tan^{-1}3$

(2,–2) ನಲ್ಲಿ $\theta_2 = \tan^{-1}3$

11. $\theta = \tan^{-1}\dfrac{12}{41}$

14. (a) $\dfrac{x}{a}\cos\theta + \dfrac{y}{b}\sin\theta = 1$

$ax\sec\theta - by\,\mathrm{cosec}\,\theta = a^2 - b^2$

(b) $x\sin\dfrac{\theta}{2} - y\cos\dfrac{\theta}{2} = a\theta\sin\dfrac{\theta}{2}$

$x\cos\dfrac{\theta}{2} + y\sin\dfrac{\theta}{2} = a\theta\cos\dfrac{\theta}{2} + 2a\sin\dfrac{\theta}{2}$

(c) $x \sin \frac{A+B}{2B} \theta - y \cos \frac{A+B}{2B} \theta = (A+B) \sin \frac{A-B}{2B} \theta$

$x \cos \frac{A+B}{2B} \theta - y \sin \frac{A+B}{2B} \theta = (A-B) \cos \frac{A-B}{2B} \theta$

15. $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^1} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b^1}$

16. (a) (i) $ax + hy = 0$ ರೇಖೆಯು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ

(ii) $hx + by = 0$ ರೇಖೆಯು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಲಂಬ

(b) $\left(\frac{-a}{2^{1/3}}, \frac{3a\ 2^{1/3}}{2} \right)$ ನಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ

$x = 0$ ನಲ್ಲಿ ಲಂಬ

(c) $\left(\frac{4a}{3}, \frac{2 . 4^{1/3}}{3} a \right)$ ನಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ

(0,0), (2a,0)ಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬ

17. (i) $\frac{\pi}{4}$

(ii) $\tan^{-1} \frac{3a^{1/3}\ b^{1/3}}{2(a^{2/3} + b^{2/3})}$

(iii) 0, ಅಂದರೆ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ – 12.2

1. $a\tan\left(\frac{x_1}{a}\right)$, $\frac{b^2}{a}\sin\left(\frac{x_1}{a}\right)\cos\left(\frac{x_1}{a}\right)$, (x_1, y_1)ನಲ್ಲಿ

2. a, a

5. $n = 2$

8. (i) -8, $\frac{-9}{2}$

(ii) 2, 2

(iii) $2a\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\frac{a}{2}\sec^4\theta$

(iv) 4, $2a$

(v) 15, $\frac{3}{5}$

(vi) -6, $\frac{-8}{3}$

(vii) $-a\sin^2\theta\cos\theta$, $-\frac{a\sin^4\theta}{\cos\theta}$

(viii) $\frac{2}{5}$, 10

(ix) -3, -3

(x) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 12.3

1. $t = 4$ ಸೆ., $v = 8$ ಮೀ/ಸೆ

2. $\frac{40}{7}$ ಮೈ/ಗಂ

3. 4.82 ಅಂ; 0.298 ಅಂ/ನಿ

4. 2.4 ಮೈ/ಗಂ

5. $\frac{1}{\pi}$ ಅಂ/ಸೆಕೆಂಡ್ ; $\frac{2}{9\pi^2}$ ಅಂ/ಸೆಂ^{2} ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ

6. $\frac{1}{5\pi}$; 20

7. 128π

8. ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ $\frac{1}{90\pi}$ ಘ.ಅಂ

9. ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 1300π ಘ.ಅಂ.

10. (i) $-160, -12, -166, \pm 4\sqrt{249}$

    (ii) $45, 25, -6, \pm 6$

    (iii) $-5\pi, 0, -5\pi, \frac{-5\pi^2}{2}$

    (iv) $70, 30, -5, 2\sqrt{15}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 12.4

1. $x = -1$ ಆದರೆ ಗರಿಷ್ಠ, $x = 3$ ಆದಾಗ ಕನಿಷ್ಠ

2. (i) ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= \frac{73}{4}$

   (ii) ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= -13$

4. ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ 1, ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ 9

6. $27\sqrt{3}$

7. 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

8. $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

9. $20\sqrt{10}$ ಮೀ.

13. $(0, a)$

14. (i) 4,4

    (ii) 8, 2

ಅಭ್ಯಾಸ – 13.1

1. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $ax+\frac{x^2}{2}$, $ax+\frac{x^3}{3}$, $ax-\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $a^2x+\frac{x^{n+1}}{n+1}$

2. $a\log x$, $a\log x+x$, $\log(a+x)$, $a\log x-x$

3. $\frac{3x^8}{8}-\frac{4x^7}{7}-\frac{5x^4}{4}+7x$

4. $\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{2}+x$

5. $x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$

6. $\frac{x^5}{5}-\frac{x^{-3}}{3}-2x$

7. $\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}$

8. $\frac{2}{11}x^{11/2}+\frac{4}{9}x^{9/2}+\frac{2}{7}x^{7/2}$

9. $-9\cot x+8\operatorname{cosec} x$

10. $\tan x+\sec x$

11. $-\cot x-\operatorname{cosec} x$

12. $-\cot x+\operatorname{cosec} x$

13. $-\cos x+\sin x$

14. $-\cos x-\sin x$

15. $-\operatorname{cosec} x$

16. $\sec x$

17. $\tan x-\cot x$

ಅಭ್ಯಾಸ – 13.2

1. $\frac{(x+1)^6}{6}$

2. $\frac{(x+1)^{-6}}{-6}$

3. $\frac{1}{2}\log(2x+1)$

4. $\frac{-1}{12}(3x+1)^{-4}$

5. $\frac{(ax+3)^5}{5a}$

6. $\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$

7. $\frac{-\cos(2x+1)}{2}$

8. $\frac{-2}{3}(5-3x)^{1/2}$

9. $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$

10. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$

11. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$

12. $-\frac{\cos 2x}{4}$

13. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$

14. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}$ ಅಥವಾ $\frac{-3\cos x}{4}+\frac{\cos 3x}{12}$

15. $\frac{\sin 3x}{12}+\frac{3}{4}\sin 3x$

16. $\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 5x}{10}$

17. $\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}$

18. $\frac{\cos 10x}{-20}-\frac{\cos 4x}{8}$

19. $\tan x-x$

20. $\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x$

21. $-\cot x-x$

22. $\frac{-\cot^3 x}{3}+\cot x+x$

23. $\frac{\sec^3 x}{3}$

24. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$

25. $\frac{e^{ax+b}}{a}$

26. $\frac{-1}{3}\sin(2-3x)$

27. $\frac{-1}{5}\operatorname{cosec}(5x-3)$

28. $\frac{\sec(3x+2)}{3}$

29. $\frac{-(7-3x)^5}{15}$

30. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}$

31. $\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2}$

32. $-\frac{\coth^3 x}{3}$

33. $-\frac{\coth^4 x}{4}$

34. $-e^{-x} - \frac{-e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-5x}}{5}$

35. $-\cot x - \frac{\cot^3 x}{3}$

36. $\frac{-\cos x}{2}$

37. $-\cot x$

38. $\frac{-\cot 5x}{5} + C$

39. $\frac{\log(4x-3)}{4}$

40. $-2(a-x)^{1/2}$

41. $e^x - e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2}$

42. $\frac{1}{2}\log(\sec 2x + \tan 2x)$

43. $-\frac{1}{2}\log(\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x)$

44. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{\sin 4x}{32}$

ಅಭ್ಯಾಸ -13.3

1. $\log \sin x$

2. $\dfrac{-(x^2+1)^{-2}}{4}$

3. $-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{x})^{-4}$

4. $2(1+e^x)^{1/2}$

5. $\dfrac{-1}{6}(1-x^4)^{3/2}$

6. $\dfrac{1}{3}\log(x^3+1)$

7. $\log(1+\sin x)$

8. $\log(1+\tan x)$

9. $-\log(1+\cot x)$

10. $\dfrac{(\tan^{-1}x)^2}{2}$

11. $\log(\sin^{-1}x)$

12. $\dfrac{(1+\tan^{-1}x)^{m+1}}{m+1}$

13. $\dfrac{(\log x)^3}{3}$

14. $\log(\log x)$

15. $\dfrac{1}{m}\log(2+e^{m\sin^{-1}x})$

16. $\dfrac{1}{12}\log(4+3x^4)$

17. $(1+e^{x^2})^{1/2}$

18. $\log(1+e^x)$

19. $\log(1+xe^x)$

20. $-(1-2\sin x)^{1/2}$

21. $\dfrac{-1}{4b(a+b\tan x)^4}$

22. $\dfrac{1}{3}\log(4+3\sin^2 x)$

23. $-\dfrac{1}{2}\log(5+2\cos^2 x)$

24. $\dfrac{1}{b}\ \dfrac{(a+b\log x)^{m+1}}{(m+1)}$

25. $\dfrac{1}{6}(3+4\tan x)^{3/2}$

26. $\dfrac{2}{3b}(a-b\cot x)^{3/2}$

27. $\dfrac{2}{3b}(a+be^{\sin x})^{3/2}$

28. $2(\log x)^{1/2}$

29. $-\dfrac{\cos ax}{a}$

30. $\dfrac{-b}{a}\cos\dfrac{ax}{b}$

31. $-2\cos\sqrt{x}$

32. $-\frac{1}{2}\cos x^2$

33. $-\frac{1}{3a}\cos ax^3$

34. $\frac{\sin ax}{a}$

35. $a\sin\frac{x}{a}$

36. $\frac{1}{2}\sin(x^2+1)$

37. $\frac{1}{3}\sin(1+x^3)$

38. $\frac{\sin^3 x}{3}$

39. $\frac{-\cos^4 x}{4}$

40. $\frac{\tan^2 x}{2}$

41. $\frac{-\log\cos(mx)}{m}$

42. $\frac{\log\sin ax}{a}$

43. $\frac{1}{a}\log(\sec ax+\tan ax)$

44. $-\frac{1}{m}\log(\text{cosec}\,mx+\cot mx)$

45. $-\frac{1}{2}\log\cos x^2$

46. $\frac{1}{3}\log\sin(x^3)$

47. $\tan x-\cot x-4x$

ಅಭ್ಯಾಸ -13.4

1. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}x}{2}$

2. $\frac{1}{3\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{3x}{\sqrt{5}}$

3. $\frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

4. $\frac{1}{12} \tan^{-1} \frac{2x^2}{3}$

5. $\frac{1}{9} \tan^{-1} \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$

6. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}.e^x}{2}$

7. $\frac{1}{3\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}.\sin x}{3}$

8. $\frac{1}{\sqrt{21}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{7}}$

9. $\frac{1}{5\sqrt{6}} \tan^{-1} \frac{5\cosh x}{\sqrt{6}}$

10. $\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{3}$

11. $\frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{2\log x}{3}$

12. $\frac{1}{2\sqrt{5}} \tan^{-1}\left[\frac{2\sin x}{\sqrt{5}}\right]$

13. $\frac{-1}{\sqrt{15}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{5}}\right)$

14. $\frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{2\tan x}{3}\right)$

15. $\frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{2\tan x}{3}\right)$

16. $\frac{1}{3\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}\tan x}{3}\right)$

17. $\frac{1}{\sqrt{21}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}\tan x}{\sqrt{3}}\right)$

18. $\frac{1}{8m} \log(9+4e^{2m\tan^{-1}x})$

19. $\frac{1}{6} \text{x} \frac{1}{2} \log\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)$

20. $\frac{1}{20} x \frac{1}{2} \log\left(\frac{4+5x}{4-5x}\right)$

21. $\frac{1}{2\sqrt{30}} \log \frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}\,x}{\sqrt{10}-\sqrt{3}\,x}$

22. $\frac{1}{4\sqrt{7}} \log \frac{\sqrt{7}+2x}{\sqrt{7}-2x}$

23. $\frac{1}{48} \log \frac{3+4x^2}{3-4x^2}$

24. $\frac{1}{90} \log \frac{5+3x^3}{5-3x^3}$

25. $\frac{1}{12} \log \frac{3+2\sin x}{3-2\sin x}$

26. $\frac{1}{4\sqrt{6}} \log \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}e^x}{\sqrt{8}-\sqrt{3}e^x}$

27. $\frac{1}{4} \log\left(\frac{2+\log x}{2-\log x}\right)$

28. $\frac{1}{12} \log\left(\frac{4+3\sqrt{x}}{4-3\sqrt{x}}\right)$

29. $\frac{1}{18} \log\left(\frac{3+2x^{3/2}}{3-2x^{3/2}}\right)$

30. $\frac{-1}{4\sqrt{15}} \log \frac{(\sqrt{12}+\sqrt{5}\cos x)}{(\sqrt{12}-\sqrt{5}\cos x)}$

31. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log(x\sqrt{5}+\sqrt{9+5x^2})$

32. $\frac{1}{\sqrt{3}} \log(x\sqrt{3}+\sqrt{16+3x^2})$

33. $\frac{1}{2} \log(2x+\sqrt{7+4x^2})$

34. $\frac{1}{6} \log(3x^2+\sqrt{16+9x^4})$

35. $\frac{1}{60} \log(4x^3+\sqrt{25+16x^6})$

36. $\frac{1}{\sqrt{3}} \log(\sqrt{3}.e^x+\sqrt{5+3e^{2x}})$

37. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log[(\sqrt{5}\sin x+\sqrt{4+5\sin^2 x})]$

38. $\frac{1}{2} \log(2\sin x+\sqrt{5+4\sin^2 x})$

39. $\frac{-1}{\sqrt{3}} \log(\sqrt{3}\cos x+\sqrt{7+3\cos^2 x})$

40. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log(\sqrt{5}\sinh x+\sqrt{4+5\sinh^2 x})$

41. $\frac{1}{4}\log\frac{x-2}{x+2}$

42. $\frac{1}{2}\ \log\ \frac{x-1}{x+1}$

43. $\frac{\sin^{-1}x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$

44. $x-\tan^{-1}x$

45. $\frac{1}{8}(\sin^{-1}x - x\,(1-2x^2)\,\sqrt{1-x^2})$

46. $(x^2-a)^{½}$

47. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

48. $\frac{\sin^{-1}x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$

49. $\sec^{-1}x$

50. $-\frac{1}{x} - \tan^{-1}x$

51. $\frac{1}{3}\log\,(3x + \sqrt{9x^2-16})$

52. $\frac{1}{4}\log\,(2x^2 + \sqrt{4x^4 - 25})$

53. $\frac{1}{28}\log\,(7x^4-9) + C$

54. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\,(\sqrt{5}e^x + \sqrt{5e^{2x} - 6})$

55. $\frac{2}{9}\log\,[3x^{3/2} + \sqrt{9x^3-8}]$

56. $\frac{1}{2} \log [2\sin x + \sqrt{4\sin^2 x - 25}]$

57. $\frac{1}{\sqrt{8}} \log (\sqrt{8} \tan x - \sqrt{8\tan^2 x - 25}]$

58. $\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2\sinh x}{\sqrt{5}}$

59. $\frac{1}{3\sqrt{8}} \log (3\sin x + \sqrt{9\sin^2 x - 8})$

60. $\frac{1}{2} \log (2\log x + \sqrt{4 (\log x)^2 - 9})$

61. $\frac{1}{30} \tan^{-1} \left(\frac{3x}{10}\right)$

62. $\frac{1}{20} \log \left(\frac{10+3x}{10-3x}\right)$

63. $\frac{1}{60} \log \frac{3x-10}{3x+10}$

64. $\frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3x}{10}$

65. $\frac{1}{3} \log (3x + \sqrt{9x^2 - 100})$

66. $\frac{1}{3} \log (3x + \sqrt{9x^2 + 100})$

67. $\frac{50}{3} \left[\sin^{-1} \frac{3x}{10} + \frac{3x}{100} \sqrt{100 - 9x^2} \right]$

68. $\frac{9}{2} \left[\sin^{-1} \frac{2x}{3} + \frac{2x}{9} \sqrt{9 - 4x^2} \right]$

69. $\frac{3}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{2x}{3}\sqrt{3-4x^2}\right]$

70. $\frac{8}{\sqrt{3}}\left[\sin^{-1}\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{3x}}{8}\sqrt{8-3x^2}\right]$

71. $\frac{10}{3}\left[\sin^{-1}\frac{3x}{\sqrt{10}}+\frac{3x}{10}\sqrt{10-9x^2}\right]$

72. $\frac{18}{\sqrt{5}}\left[\sin^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{18}}+\frac{x\sqrt{5}}{18}\sqrt{18-5x^2}\right]$

73. $\frac{7}{\sqrt{3}}\left[\sin^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{7}+\frac{x\sqrt{3}}{7}\sqrt{7-3x^2}\right]$

74. $\frac{9}{4}\log(2x+\sqrt{9+4x^2})+x\sqrt{9+4x^2}$

75. $\frac{9}{4}\left[\log(4x+\sqrt{9+16x^2})+\frac{4x}{9}\sqrt{9+16x^2}\right]$

76. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\log(x\sqrt{2}+\sqrt{3+2x^2})+\frac{x\sqrt{2(3+2x^2)}}{3}$

77. $\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\log(x\sqrt{3}+\sqrt{4}+3x^2)+\frac{x\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+3x^2}\right]$

78. $\frac{6}{\sqrt{7}}\left[\log(x\sqrt{7}+\sqrt{6+7x^2})+\frac{x\sqrt{7}}{6}\sqrt{6+7x^2}\right]$

79. $\frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a}$

80. $\frac{1}{4\sqrt{14}}\log\left[\frac{x\sqrt{7}-\sqrt{8}}{x\sqrt{7}+\sqrt{8}}\right]$

81. $\frac{1}{4\sqrt{5}} \log \frac{2x-\sqrt{5}}{2x+\sqrt{5}}$

82. $\frac{1}{2\sqrt{15}} \log \frac{\sqrt{5}+x\sqrt{3}}{\sqrt{5}-x\sqrt{3}}$

83. $\frac{1}{2ab} \log \left[\frac{a+bx}{a-bx}\right]$

84. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log (\sqrt{5}\,x + \sqrt{3+5x^2})$

85. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log (x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2-6})$

86. $\frac{1}{3} \log \ [x\sqrt{3} + \sqrt{4+3x^2}]$

87. $\frac{1}{\sqrt{7}} \log (x\sqrt{7} + \sqrt{8+7x^2})$

88. $\frac{1}{\sqrt{3}} \log (x\sqrt{3} + 3x^2-8)$

89. $2 \ \sin^{-1} \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

90. $\frac{25}{4} \log (2x + \sqrt{25+4x^2}) + x\sqrt{25+4x^2}$

91. $\frac{1}{2\sqrt{5}} \sqrt{5x^2-6}.\ x\sqrt{5} - \frac{3}{\sqrt{5}} \ \log (x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2-6})$

ಅಭ್ಯಾಸ – 13.5

1. $\frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right) + C$

2. $\frac{1}{\sqrt{11}} \log\left(\frac{\sqrt{11} + \tan\frac{x}{2}}{\sqrt{11} - \tan\frac{x}{2}}\right) + C$

3. $\frac{2}{\sqrt{13}.\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{13}}\right) + C$

4. $\frac{2}{3} \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right) + C$

5. $\frac{1}{\sqrt{6}} \log\left[\frac{\tan\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2/3}}{\tan\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2/3}}\right] + C$

6. $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C$

8. $\frac{4}{\sqrt{39}} \tan^{-1}\frac{4x+3}{\sqrt{39}} + C$

9. $\frac{1}{\sqrt{17}} \log\left(\frac{2x+3-\sqrt{17}}{2x+3+\sqrt{17}}\right) + C$

10. $\frac{1}{4\sqrt{3}} \log \left(\frac{x-2-2\sqrt{3}}{x-2+2\sqrt{3}}\right) + C$

11. $\frac{1}{\sqrt{15}} \tan^{-1} \left(\frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$

12. $\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{7}} + C$

13. $\log \frac{(2x+1)}{x+1} + C$

14. $2 \log \{(2x-3) + \sqrt{4x^2-12x+16}\} + C$

15. $\sin^{-1} \left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

16. $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \left(\frac{(x+1)}{3} \sqrt{2}\right) + C$

17. $\log \{(2x-5) + 2\sqrt{x^2-5x+8}\} + C$

18. $\log \{(x+1) + \sqrt{x^2+2x-1}\} + C$

19. $\log \{(x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}\} + C$

20. $\log \{(x-2) + \sqrt{x^2-4x-6} + C$

21. $\sin^{-1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{10}}\right) + C$

22. $\frac{3}{8} \log \{(2x+1) + 2\sqrt{1+x+x^2}\} + \frac{\sqrt{3}}{4} (2x+1)$

23. $\frac{1}{2} \log \{(x+1) + \sqrt{x^2+2x+2}\} + \frac{1}{2} (x+1) \sqrt{x^2+2x+2} + C$

24. $\frac{9}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x+2}{3}\right) + \frac{(x+2)}{2} [\sqrt{5-4x-x^2}] + C$

25. $\frac{37}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{37}}\right) + \frac{37}{4}(2x-3)\sqrt{7+3x-x^2} + C$

26. $\frac{31}{16}[\log(4\times-3)+\sqrt{8}\sqrt{2x^2-3x+5}]$

$$+\frac{1}{2\sqrt{8}}(4\times-3)\sqrt{2x^2-3x+5+C}$$

27. $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log(3\cos x + 2\sin x) + C$

28. $\frac{x^3}{3} + x + 2\log(x+\sqrt{x^2-1}) + C$

29. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$

30. $\frac{x^2}{2} + \log(x+1)$

ಅಭ್ಯಾಸ -13.6

1. $\log\frac{x-2}{x-1} + C$

2. $\log\frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-1} + C$

3. $\frac{1}{x-1} + \log\frac{(x-2)}{(x-1)} + C$

4. $-\frac{1}{x} + 2\log x - \frac{1}{x-1} - 2\log(x-1) + C$

5. $\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} + C$

6. $\log(x) - ½\log(x^2+1) + C$

7. $\frac{1}{2(x^2+1)} + \log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$

8. $\log\frac{(x-2)^2}{x-1} + C$

ಅಭ್ಯಾಸ – 13.7

1. $(x^3-3x^2+6x-6)e^x$

2. $\frac{1}{4}x^3 \log \frac{x^3}{e}$

3. $\frac{1}{4}x^2 [2(\log x)^2 - 2\log x + 1]$

4. $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \log \frac{x^{n+1}}{e}$

5. $x\tan^{-1}x - \log\sqrt{(x^2+1)}$

6. $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x + \frac{x}{2}$

7. $x\cot^{-1}x + \log\sqrt{(x^2+1)}$

8. $x\sec^{-1}x - \cosh^{-1}x$

9. $-x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x)$

10. $\frac{1}{81}\left(3x\sin 3x + \cos 3x + \frac{x\sin x}{2} + \cos x\right)$

11. $\frac{1}{8}(1-2x^2)\cos 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$

12. $\frac{1}{2}(x\sec^2 x - \tan x)$

13. $-x\cot x + \log \sin x$

14. $\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x) - \frac{1}{4}(x^2-2x)$

15. $\frac{1}{\sqrt{41}} e^{4x} \cos\left(5x - \tan^{-1}\frac{5}{4}\right)$

16. $\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\, e^x \cos(2x - \tan^{-1}2)$

17. $\frac{1}{4}$ $\cosh 2x \sin 2x - \sinh 2x \cos 2x$

18. $\frac{e^{m\tan^{-1} x}}{\sqrt{m^2+1}}$ $\cos(\tan^{-1}x - \cot^{-1}m)$

19. $x\sin x + \cos x$

20. $\frac{x^2}{4}$ $(2 \log x - 1)$

21. $-\frac{e^{-ax}}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ $[a\cos(bx+b)\sin bx]$

22. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}$ $[a\sin bx - b\cos bx]$

23. $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$ $e^{mb}\cos(\theta - \cot^{-1}m)$ ([illegible] $x=\sin\theta$)

24. $x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

25. $\frac{1}{4}$ $\left(\theta\sin\theta + \cos\theta - \frac{\theta\sin 3\theta}{3} - \frac{\cos 3\theta}{3^2}\right)$

($x = \sin\theta$)

26. $x\tan x + \log\cos x$

27. $x\sec^{-1}x - \cosh^{-1}x$

28. $\frac{1}{m}$ $e^{m\tan^{-1} x}$

29. $\frac{a\sin bx \sinh ax - b\cos bx \cosh ax}{a^2 + b^2}$

30. $\cosh x\,(x^5+20x^3-120) - x\sinh x\,(5x^3 + 60x - 120)$

ಅಭ್ಯಾಸ - 14.1

1. $819, \frac{1}{6}, 2, 211.5$

2. $\frac{1}{3}, \frac{15}{32}, \frac{a^{n+1}}{n+1}(2^{n+1}-1), 2(\sqrt{2}-1)$

3. $\log 3, -\log a, \log\frac{7}{4}, \log 4$

4. 1, 0, 0

5. $\frac{\pi}{8}\,1, \frac{\pi}{2}$

6. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$, 8812, 446

7. $\frac{\pi}{4}, \frac{a^2}{2}\{\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\}$, 1.074

8. $\sqrt{2-1}, \frac{1}{2}\log\frac{9}{5}, \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\sqrt{2}-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

9. $\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\log 2$

10. $2\log 2-\frac{3}{4}, \frac{128}{3}\log 2-7, b\log b-a\log a+a-b$

11. $1, \sqrt{2}$

12. $\frac{\pi}{2}-1, \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

13. $-\frac{1}{5}(e^{\pi}+2), \frac{1}{5}(e^{2\pi}+1)$

14. $e-2$, sinh1

15. $\frac{a^3}{3}, a(\sqrt{2}-1)$

16. π, π^2-4

17. $0, \frac{2}{3}$

18. 446, 2.287

19. $3\left(1-\frac{\pi}{2}\right), \frac{10}{3} - 8\log\frac{3}{2}$

20. $\frac{1}{2}\log 3, \frac{1}{2}\log 3$

21. $\frac{1}{\sqrt{7}}\log\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}, \frac{1}{3}\log 2$

22. $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}, \frac{3\pi}{16}$

23. $\frac{1}{2} + \log\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log\frac{2}{3}$

24. $\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}, \frac{3\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$

25. $0, \frac{4}{9}$

26. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

27. $\frac{\pi}{ab}$

28. $\tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$

29. $\frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$

30. $\frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{3}\right], \log\frac{256}{243}$

7. $\frac{\pi}{4}$

8. $\frac{\pi}{4}$

9. $\frac{7\pi}{4}$

10. $2-\frac{\pi}{4}$

11. $\frac{4}{15}a^{\frac{5}{2}}$

12. $\frac{\pi^2}{4}-\frac{7}{8}$

13. $-\frac{\pi^2}{2}$

14. $\frac{\pi}{4}$

15. $\frac{\pi}{4}$

16. $\frac{\pi}{4}$

17. $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

18. $\frac{\pi}{4}$

19. $\frac{\pi^2}{4}$

20. π

21. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 14.3

1. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{4}$

3. 9

4. 4

5. $\frac{16}{3}$

6. 2π

7. $\frac{4}{3}$

8. $\sqrt{2}-1$

9. (i) $76\sqrt{a}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{2}}-1$ (iii) $2a(e-e^{-1})$ (iv) $\log 2$ (v) $\frac{40}{3}$ (vi) $1-\frac{\pi}{4}$

10. $12\sin^{-1}\frac{4}{5}$

11. $9\sqrt{2}\,[\tan^{-1}(2\sqrt{2})-\tan^{-1}(-\sqrt{2})]-9\log 3$

12. $2(\pi+2)$

13. $\frac{125a^2}{24}$

14. (i) $c^2\sin\frac{h}{c}$ (ii) e^h-1

(iii) $b\log b-a\log a+a-b$

(iv) $\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)-\frac{b^2}{2a}\sqrt{a^2-b^2}$

15. $\frac{64}{3}$ 16. $\frac{1}{4}$ 17. $\frac{1}{3}$ 18. 9

ಅಭ್ಯಾಸ – 15.1

1. $x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

2. $y \dfrac{dy}{dx} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = a$

3. i. $x^2+y^2=p^2$

   ii. $\dfrac{dy}{dx} = -\cot \alpha$

   iii. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

4. $y \dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

5. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -m^2y$

7. $(1-x^2) \dfrac{d^2y}{dx^2} - x \dfrac{dy}{dx} = 0$

9. $x \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2 \dfrac{dy}{dx} = 0$

10. $y \dfrac{d^3y}{dx^3} + 3 \dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ – 15.2

1. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-xy+x^2-2=0$

2. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-9\dfrac{d^2y}{dx^2}+23\dfrac{dy}{dx}-15y=0$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

4. $y\left[1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]=2x\dfrac{dy}{dx}$

ಅಭ್ಯಾಸ – 15.3

1. $x^2+y^2=k^2$
2. $xy=a$
3. $x=ay$
4. $x^2-y^2=a$
5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=A$
6. $\dfrac{1}{x^m}+\dfrac{1}{y^n}=C$
7. $x^2+3x+3y+y^2=A$
8. $y^3+3y-x^3-3x=A$
9. $2x^3+2y^3+3y^2+6x+6y+3x^2=A$
10. $(1+e^{-x})(1+e^{-y})=C$
11. $\tan x+\tan y=C$
12. $(1+y)(1+e^x)=Ce^y$

13. $\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} y + y\sqrt{1-y^2} = K$

14. $x + y - e^{-x} - e^{-y} = C$

15. $y = K\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}$

16. $C = \sin y \cos y$

17. $\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \sin^{-1} y = K$

18. $(1-ay)(a+x) = Cy$

19. $(1-e^x)^3 = C\tan(\tan y)$

20. $\dfrac{1+\sqrt{2}\,e^{-y/2}}{1-\sqrt{2}\,e^{-y/2}} = Kx$

21. $Kxy = e^{-(x+y)}$

22. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \log\dfrac{K(1+\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{y^2+1})}{xy}$

23. $\sqrt{1+y^2} = \log\dfrac{K(1+\sqrt{1+x^2})}{x}$

24. $(a+x)(1-ay) = Ky$

25. $x^2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x + C = \dfrac{-\log y}{y} - \dfrac{1}{y}$

26. $y^2 \log y = x\sin x + C$

27. $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y}{2}\sin 2y + \dfrac{1}{4}\cos 2y$

$$= -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right) + C$$

28. $\dfrac{[\log(\sec x + \tan x)]^2}{2} = \dfrac{[\log(\sec y + \tan y)]^2}{2} + K$

29. $\dfrac{(1+x)^{3/2}}{3} - (1+x)^{1/2} + y^{1/2} + \dfrac{y^{3/2}}{3} = K$

30. $\log K(1+e^{-x})(1+y) = y - x$

ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ

1.1 ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ

1. $A=\{x|x^3-x=0\}$, $B=\{x|x^2-3x+2=0\}$ ಮತ್ತು $C=\{x|x^2-1=0\}$ ಆದರೆ $B\times C$ ಮತ್ತು $B\times A$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $B\times C$ ಯು $B\times A$ ಯ ಉಪಗಣವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ತಿಳಿಸಿ.

2. $A=\{2, 3, 5)$, $B=\{2, 5, 6\}$ ಆದರೆ $(A-B)\times(A\cap B)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $(x+1, y+1) = (5, -7)$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. x ಮತ್ತು y ಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದು, $x, y \in R$ ಇರುವಂತೆ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ಆದರೆ A ಮೇಲೆ R ನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. R ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ: $R=\{(4,5), (1,4), (4,7), (7,6), (7,3)\}$. R^{-1} ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

6. ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದ ಮೇಲೆ R ಎನ್ನುವ ಸಂಬಂಧವು "ಭಾಜ್ಯವಾಗಿದೆ"ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದೆ ಆಗ R ಸಂಬಂಧವು ಯಾವ ಬಗೆಯ ಸಂಬಂಧ?

7. $f:R\rightarrow R$ ಎನ್ನುವುದನ್ನು $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ಎಂದೂ $g:R\rightarrow R$ ಎನ್ನುವುದನ್ನು $g(x) = 3x - 4$ ಎಂದೂ ನಿರೂಪಿಸಿದೆ. $gof(2)$ ಮತ್ತು $fog\ (2)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $f:R\rightarrow R$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿದೆ:

   $f(x) = 2x+7$, $x \geq 2$ ಆದಾಗ ಮತ್ತು

   $f(x) = 4-x$, $x < 2$ ಆದಾಗ.

   $f(2)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $f(x) = 2x-3$ ಮತ್ತು $g(x) = x^3+5$ ಎಂಬುದು $R\rightarrow R$ ಗೆ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ. ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. R^+ ಎನ್ನುವುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. $f: R^+ \rightarrow R^+$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು

$f(x) = \sqrt{x}$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದ್ದರೆ,

$f(5+2\sqrt{6})$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.2 ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

ಆದರೆ $A+B$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $4A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 20 & 7 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ $3A$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-2y & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ

x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ $(A^1)' = A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ

$2X + 3A = 4B$ ಆಗುವಂತೆ X ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ಆದರೆ

$A^2 = \begin{pmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ -\sin2\theta & \cos2\theta \end{pmatrix}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

7. $(2 \;\; x \;\; 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 9$ ಆದರೆ x ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ

$A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $A = (1\ 3)$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ
$A\ B$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. A ಮತ್ತು Bಗಳು ಎರಡು ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣದ ಮಾತೃಕೆಗಳು (ಕೋಶಗಳು) ಮತ್ತು $AB = BA = I$ (ಏಕಮಾನ ಕೋಶ) ಆದರೆ B ಯು ಯಾವ ವಿಧದ ಕೋಶವಾಗಿದೆ ?

11. $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ A ಯ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಏನು ?

13. $|A - XI| = 0$ ನಿರ್ಧಾರಕ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಯಾವುವು?
ಇಲ್ಲಿ $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು I ಎನ್ನುವುದು 2 ಪರಿಮಾಣದ ಏಕಮಾನ ಕೋಶ.

14. ಈ ಮುಂದಿನ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಏನು ?

$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 105 & 106 \\ 107 & 108 & 109 \end{vmatrix}$$

15. $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ ಆದರೆ

$A+B$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ಆದರೆ A ಯ ಸಂಗತ ಕೋಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ A ಯ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $\begin{vmatrix} x & 1 & y+z \\ y & 1 & z+x \\ z & 1 & x+y \end{vmatrix}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

20. $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $A-2B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ಆದರೆ Aಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$\begin{vmatrix} 2+x & 3 & -4 \\ 2 & 3+x & -4 \\ 2 & 3 & -4+x \end{vmatrix} = 0$$

22. ಈ ಕೋಶದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$$\begin{bmatrix} 8579 & 8589 \\ 8581 & 8591 \end{bmatrix}$$

23. $\begin{bmatrix} x+y & 7 \\ 9 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ x, y ಬೆಲೆ ಏನು?

24. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು (x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$3x+y = 8-z$$
$$x-2y+z = 0$$
$$4x+2z = 20-5y$$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, A^3ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

26. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & x & 3 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

27. $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ ಆದರೆ A^2 ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

28. A ಕೋಶದ ಪರಿಮಾಣ 4x3 ಆಗಿದ್ದು,
B ಕೋಶದ ಪರಿಮಾಣ 5x4 ಆಗಿದ್ದು ಮತ್ತು
C ಕೋಶದ ಪರಿಮಾಣ 7x5 ಆದರೆ
$(A' \times B') \times C$ ಕೋಶದ ಪರಿಮಾಣ ಎಷ್ಟು?

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು

$2A-3B+X = 0$ ಆದರೆ X ಎಷ್ಟು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

30. $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ಆದರೆ AA' ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.3 ಸದಿಶಗಳು

1. $\vec{a} = (-1,0)$, $\vec{b} = (2, -1)$, $\vec{c} = (2, 1)$ ಮತ್ತು $\vec{d} = (1, 2)$ ಆದರೆ $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\vec{a} - \vec{b} = (3, 4, 6)$ ಮತ್ತು $\vec{a} + \vec{b} = (1,2,8)$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $x(1,2)+y(2,1) = (8,7)$ ಅದರೆ x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\vec{A}$ ಯ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಏಕಮಾನ ಸದಿಶ ಏನು?

5. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಿದರೆ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $ABCD$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ನ ಏಕಮಾನ ಸದಿಶದ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವೆಷ್ಟು?

9. $\hat{i}(\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j}(\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k}(\hat{i} \times \hat{j})$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳ $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ಆದರೆ $\overrightarrow{PQ}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} + \vec{b}$ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಏಕಮಾನ ಸದಿಶ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\overrightarrow{PQ}$ ನ ಪ್ರಮಾಣ 3 ಮತ್ತು x ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕದಿಸೆಯಲ್ಲಿ $\overrightarrow{PQ}$ ಸದಿಶವು $210°$ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತದೆ. x ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $\overrightarrow{PQ}$ ನ ಅಂಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $\hat{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ $\hat{a} + \hat{b}$ ಮತ್ತು $\hat{a} - \hat{b}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವೆಷ್ಟು?

14. $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಈ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆದರೆ $\cos\theta$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ ಮತ್ತು $4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{k}$ ಆದರೆ $(2\vec{a} + \vec{b})\ (\vec{a} - 2\vec{b})$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಆದರೆ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳು $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} + \hat{k}$ ಉಳ್ಳ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ಆಗಿದ್ದು, ಈ ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆಗಿದ್ದರೆ $\sin\theta$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$ ಮತ್ತು $|\vec{c}| = 5$ ಮತ್ತು $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ಆದರೆ $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಎಷ್ಟು?

21. $a\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ ಆದರೆ $|\vec{a} + \vec{b}|$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕಮಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

25. $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆಗಿದ್ದರೆ $\sin\theta$ ವನ್ನುಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

26. $2\hat{i} + x\hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $3\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}$ ಗಳು ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, x ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

27. $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಗಳು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಏಕಮಾನ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\vec{a} - \vec{b}$ ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

28. $\vec{a} = (2,3)$ ಮತ್ತು $\vec{b} = (3,4)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

29. $(x,1,2)$, $(2,-3,4)$ ಮತ್ತು $(1,2,-1)$ ಸದಿಶಗಳು ಏಕತಲಸ್ಥವಾಗಿದ್ದರೆ, xನ ಬೆಲೆ ಏನು?

30. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{b} = \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} + \hat{k}$ ಆದರೆ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.4 ಸಂಕುಲಗಳು

1. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ $a * b = 1 + ab$ ಆಗಿದೆ. a ಮತ್ತು b ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ * ಎನ್ನುವುದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಆದರೆ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಆಗಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

2. ω ಎನ್ನುವುದು ಒಂದರ ಘನಮೂಲಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದ್ದರೆ ω^{17} ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ (ಮಾಡ್ಯುಲೊ 6) ವನ್ನು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. 2x2 ಎಲ್ಲಾ ಕೋಶಗಳ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಕುಲ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

5. $(G, *)$, $a*b = \frac{ab}{5}$ ಮತ್ತು $a, b \in G$ ಇರುವ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯಧಾತು ಮತ್ತು 8ರ ವಿಲೋಮ ಧಾತುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. G ಎನ್ನುವುದು -1 ರ ಹೊರತು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಮತ್ತು $*$ ಅನ್ನು $a*b = a+b+ab$, $a, b \in G$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದೆ. $(G, *)$ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $2^{-1} * x * 3^{-1} = 5$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದರ 4ನೆಯ ಮೂಲಗಳು ಯಾವುವು?

8. $G = \{2^n | n \in Z\}$ ಆದರೆ, G ಎನ್ನುವುದು, ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $[Q^+]$ಗುಣಲಬ್ಧದ ಸಂಕುಲದ ಉಪಸಂಕುಲ ಆಗುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. G ಎಂಬ ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೋ 'a' ಗೆ $a^2=a$ ಆದರೆ 'a' ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 2^n ನಂತಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ (n ಎನ್ನುವುದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಈ ಗಣವು ಸಂಕುಲ ಆಗುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. G ಎನ್ನುವುದು ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಆಗಿದೆ. $a, b \in G$ ಆದರೆ, $b^{-1} a^{-1} ba$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಮಾಡ್ 8 ರ ವ್ಯವಕಲನದ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ $(Z_8, -)$ ಸಂಕುಲ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $e * e = e$ ಆದರೆ, $(\{e\}, *)$ ಎನ್ನುವುದು ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. α ಎನ್ನುವುದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ಎನ್ನುವ ಕೋಶಗಳ ಗಣವು ಕೋಶ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. 7 ಮತ್ತು 8 ರ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕ್ಷೇತ್ರ $\{0,1,2,3, ...12, + \text{mod } 13, \text{x mod } 13\}$ ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $M = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right]$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ $\cos\theta + i\sin\theta$ ದ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $G = \{0,1,2,3......5\}$, ಸಂಕಲನ mod 6, ರಲ್ಲಿ 5ರ ವಿಲೋಮ ಏನು?

19. $\{1,2,3\}$ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಗಣವು ಎಂದಿನ ಸಂಯೋಜನೆಯ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ಎಂಬುವು S_3ನಲ್ಲಿ

ಎರಡು ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳಾದರೆ $\alpha\beta$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. $p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು

$r = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$ ಗಳು S_3 ನಲ್ಲಿ 3 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಾದರೆ,

pqr ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. S_3ಯಲ್ಲಿ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ನ ವಿಲೋಮ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

23. S_3 ಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸಂಕುಲವು ಅಬಿಲಿಯನ್ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2.1 ವೃತ್ತಗಳು

1. ಕೇಂದ್ರವು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದು, $5x+12y-13=0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $y = mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2+y^2 = a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬೇಕಾದರೆ ಷರತ್ತು ಏನು?

3. $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಯಾವುದು?

4. $y = mx+c$ ಸರಳರೇಖೆಯು $x^2+y^2 = a^2$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬೇಕಾದರೆ ಷರತ್ತು ಏನು?

5. (3, –2) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಮತ್ತು $5x+12y-4 = 0$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x+y+c = 0$ ರೇಖೆಯು $(x+2)^2+(y-2)^2 = 5$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ c^2 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $x^2+y^2-8y-1 = c$ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು (4, 6)ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $4x^2+4y^2-16y-19 = 0$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $x^2+y^2+4x-7y+12 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು y–ಅಕ್ಷವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $x^2+y^2-2x-4y-20 = 0$ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವು $x+y-3 = 0$ ಆಗುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. (5,3), (1,5), (3,–1) ಶೃಂಗವಾಗುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. x– ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವಿದ್ದು, (5, 1) ಮತ್ತು (3,4) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. (–4,5) ಮತ್ತು (3,7) ಬಿಂದುಗಳು ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $x^2+y^2-6x-2y+5 = 0$ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು $x-y-1 = 0$ ರೇಖೆ ಇವುಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $x^2+y^2-4x+6y-12 = 0$ ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ಏಕಮಾನ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಸವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

17. $x^2+y^2 = 100$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ (6,8) ರಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಓಟ ಎಷ್ಟು?

18. x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ, 3 ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಇದ್ದರೆ, ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. x–ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ $\frac{\pi}{3}$ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವ ಮತ್ತು $x^2+y^2+6x+8y+1 = 0$ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. A ಮತ್ತು B ಗಳು (6,0) ಮತ್ತು (0,8) ಆಗಿವೆ. OAB ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್ವೃತ್ತಕ್ಕೆ O ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. ಒಂದು ಚೌಕದ ಒಂದು ಶೃಂಗವು O ಆಗಿದ್ದು, ಉಳಿದವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು(4,0) ಮತ್ತು (0, 4) ಆಗಿವೆ. ಈ ಚೌಕದ ಅಂತರ್ವೃತ್ತಕ್ಕೆ O ನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $x^2+4y^2 = 25$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $4x-37 = 25$. ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

23. $x-y = 4$ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2+y^2-9 = 0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2-2x+8y-7 = 0$ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮನಾಗಿದೆ. ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. $ABCD$ ಯು $2a$ ಭುಜವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಒಂದು ಚಚ್ಚೌಕ. ಈ ಚೌಕದ ಕರ್ಣಗಳು x– ಮತ್ತು y–ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $ABCD$ ಚೌಕದೊಳಗೆ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿ ರಚಿಸಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

25. ಈ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

    $x^2+y^2+4x+2y+1 = 0$
    $2x^2+2y^2+8x+6y-3 = 0$

26. ಈ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

    $x^2+y^2-(2\cos t) . x+ (2\sin t) y-15 = 0$

27. ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವೆಷ್ಟು?

28. $x^2+y^2-4x+8y-29 = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಯಾವುದು ?

29. $x^2+y^2=85$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ (7, 6) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

30. $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ ಮತ್ತು $x^2+y^2+Kx-2y+3=0$ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ K ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2.2 ಶಂಕುಜಗಳು

1. $x^2-16y=0$ ನ ಅರ್ಧನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x^2+2x+16y-31=0$ ಎಂಬ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾದ ನಾಭಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $3x^2+8y=0$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾದ ನಾಭಿಲಂಬವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $y^2=18x$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾದ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y ನಿರ್ದೇಶಕವು x ನಿರ್ದೇಶಕದ ಮೂರುಪಟ್ಟು ಆಗಿರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $y=2x+1$ ರೇಖೆಯು $y^2=8x$ ಎಂಬ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾವನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ?

6. ಶೃಂಗವು (1, –2) ಮತ್ತು ನಾಭಿಯು (1, –1) ಆಗಿರುವ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾದ ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $y^2=4ax$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾಗೆ $y=mx+c$ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಷರತ್ತುಗಳು ಏನು ತಿಳಿಸಿ.

8. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಸ್ಥಿರಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವ ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವಂತೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಎಂಬ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ 32 ಮತ್ತು ಒಂದು ನಾಭಿಯು (8, 0) ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 50. ಅರ್ಧ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದ 150 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ (e) ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರದ ಮೂರರಷ್ಟಾದರೆ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ (e) ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $y^2=4ax$ ಪಾರಾಬೋಲವಿಗೆ $(at^2, 2at)$ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $9x^2+4y^2=36$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. a ಮತ್ತು bಗಳು ಅರ್ಧದೀರ್ಘಾಕ್ಷ ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ ಆಗಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ (e) ಎಷ್ಟು?

15. $25x^2+4y^2=100$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಅರ್ಧನಾಭಿಲಂಬವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿಗಳ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 25, ನಾಭಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 8 ಆದರೆ, ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ದೀರ್ಘಾಕ್ಷವು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಮೂರರಷ್ಟು ಇರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ.

19. $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $x^2+9y^2=9$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ನಾಭಿಜ್ಯಾವು P ಮತ್ತು Qಗಳಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. PQವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. ಚಾಲಕವು $x=4$ ಮತ್ತು $e=\frac{1}{4}$ ಆದರೆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. ಚಾಲಕಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು $10\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಆದರೆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದವು 8 ಮತ್ತು ನಾಭಿಗಳಿಗಿರುವ ಅಂತರವು $2\sqrt{2}$ ಆದರೆ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಲ್ಲಿ (x_1, y_1) ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

25. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಮತ್ತು A'ಗಳಲ್ಲಿಯೂ y–ಅಕ್ಷವನ್ನು B ಮತ್ತು B' ಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ನಾಭಿ S ಅನ್ನು B ಗೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ $\frac{3\pi}{4}$ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಅದರ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

26. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬೇಕಾದರೆ ಇರುವ ಷರತ್ತುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

27. ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ 7 ಆಗಿರುವ ಮತ್ತು (3, –2) ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

28. ನಾಭಿಗಳ ಅಂತರ 10 ಮತ್ತು ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ $\frac{9}{2}$ ಇರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

29. x–ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y–ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಅಕ್ಷಗಳನುಳ್ಳ ಮತ್ತು (2, –2) ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಹಾಗೂ $e = 2$ ಆಗಿರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

30. $9x^2-4y^2 = 25$ ಎಂಬ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

31. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

32. (–2, 1) ಮತ್ತು (4, –3) ಬಿಂದುಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಹಾದುಹೋಗುವ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

33. $9x^2-16y^2-36x+96y-1=0$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

34. $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ನಾಭಿಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

35. (1, –1) ಕೇಂದ್ರ ಉಳ್ಳ ಅಕ್ಷಗಳು x–, y–ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ, $e = \sqrt{3}$ ಆಗಿರುವ ಮತ್ತು ಚಾಲಕಗಳ ಅಂತರವು 2 ಇರುವ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

36. $5x-2y+4m=0$ ರೇಖೆಯು $4x^2-y^2=36$ ಶಂಕುಜದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾದರೆ m ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

37. $xy = 0$ ಮತ್ತು $(x-4)\ (y+3) = 0$ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಆಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

38. $x^2+3y^2 = 12$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು (2, 2) ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಹಾದು ಹೋದರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

39. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಒಂದು ಕೊನೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ನಾಭಿಗಳು ಇವುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

40. (4, 1) ಎಂಬ ಬಿಂದವಿನಲ್ಲಿ $x^2+2y^2-4x+4y-6=0$ ಎಂಬ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.1 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

1. $\sin^{-1} \frac{5}{13} = \tan^{-1} \frac{5}{12}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $\sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{-24}{25}\right)\right]$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$ $(x,y \geq 0,\ xy \leq 1)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4. $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} = \tan^{-1} \frac{3}{4}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. $\tan^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{27}{11}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{\pi}{4}$ ಆದರೆ $x+y+xy=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $\tan^{-1}3x+\tan^{-1}2x=\frac{\pi}{4}$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

10. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

11. $\cos^{-1}\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ ಯ ಬೆಲೆ ಏನು?

12. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$\sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right]$$

13. $\cos\left[\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]$ ರ ಬೆಲೆ ಏನು?

14. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

15. $\sin\left(2\cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಏನು?

16. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ x ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
$\sin^{-1}x=2\tan^{-1}x.$

17. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ ನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು?

18. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$$

19. ಕೆಳಗಿನದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

20. ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\sec^{-1}\left(\sqrt{\frac{34}{5}}\right)+\text{cosec}^{-1}\sqrt{17}$$

3.2 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1. $x+iy=\left[\frac{(1+2i)(1+i)}{1+3i}\right]$ ಆದರೆ x^2+y^2 ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

2. $(3+xi)(4-2i)=y+6i$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆ ಏನು?

3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
$(1+\sqrt{3}i)^5+(1-\sqrt{3}i)^5$

4. $(1+i)^{18}+(1-i)^{18}$ ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

5. $\frac{1-i}{1+i}$ ನ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. z_1 ಮತ್ತು z_2 ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮಿಶ್ರಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ $\frac{z_1}{z_2}$ ನ ಕೋನಾಂಕವು z_1 ಮತ್ತು z_2 ಗಳ ಕೋನಾಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ: $$\frac{\cos\frac{m\pi}{2}+i\sin\frac{m\pi}{2}}{\cos\frac{m\pi}{3}+i\sin\frac{m\pi}{3}}$$

8. $(-1+\sqrt{3}\,i)$ ನ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

9. $\left[\dfrac{2}{3+i} - \dfrac{3+i}{1+2i}\right]$ ಇದರ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಅನುವರ್ತಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

10. $(\cos3\theta + i\sin3\theta)^2 / (\cos\theta - i\sin\theta)^3$ ನ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗ ಯಾವುದು?

11. $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ಆದರೆ $z^3 - \dfrac{1}{z^3}$ ಬೆಲೆ ಏನು?

12. $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\theta$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $(1+\cos\theta+i\sin\theta)$ದ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಕೋಣಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $z = 3+2i$ ಆದರೆ $(z+\bar{z})^2 + (z - \bar{z}^2 - 3z\bar{z})$ ಎಷ್ಟು?

15. $(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)^9$ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-1/2}$$

17. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ ಆದರೆ,
$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y$ ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

18. n ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, $i = \sqrt{-1}$ ಆದರೆ, $(i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3})$ ಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

19. $x = \cos\theta + i\sin\theta$ ಆದರೆ $x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

20. $(1+i)^5 + (1-i)^5$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. $z = \sqrt{3}+i$ ಆದರೆ, $\sqrt{\bar{z}}$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ: $(\sqrt{3}+i)^4 - (\sqrt{3}-i)^4$

23. $(1+i)^6 + (1-i)^6$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ಆದರೆ,

$$\frac{z^{2n}-1}{z^{2n}+1} = i \tan n\theta$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

25. $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$ ಆದರೆ, $x = \cos\theta \pm i\sin\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4.1 ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಕಲನಕ್ರಿಯೆ

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x\sin 3x}{1-\cos x}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{2x - \sin x}$

3. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\pi}{4} - x}$

4. $f(x) = 3x + x^2 + 7$ ಆದರೆ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $f(x) = \sin x$ ಆದರೆ $f(x+y) \times f(x-y)$ ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

7. $f(a-x) = \sin x + \cos x$ ಆದರೆ $f(x)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $f(x) = e^{\sin^{-1} x}$ ಆದರೆ $f(0)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $\lim_{x \to 2} \left[\frac{x^2-4}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2}}\right]$ ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ಆದರೆ $f(x+h) - f(x)$ ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

11. x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\sin^{-1}(e^x) + \cos^{-1}(e^x)$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\frac{d}{dx}\left[\cot\left(\cot^{-1}\frac{2}{x}\right)\right] =$ ____________

13. $y = \log(\log \sin x)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $\cot y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $y = \log_x e$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $y = \sec^2(\sec^{-1}x)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} =$ ______

18. x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $e^x \sin x$ ನ ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $xy = 4$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $y = 5^x$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. $y = a\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. x ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, $y = \sin(\cos^{-1}x + \sin^{-1}x)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. $x^m y^n = (x+y)^{m+n}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx} =$ ______

24. $\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}y = a$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

25. $x = a\cos^4\theta$, $y = b\sin^4\theta$ ಆದರೆ $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

26. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

ಆದರೆ, $\frac{7\pi}{4} = \theta$ ಆದಾಗ $\frac{dy}{dx}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

27. $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ ನ ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

28. $y = x^3+ax^2+bx$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ $x = -3$ ಮತ್ತು $x = -\frac{1}{3}$ ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು x– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ a ಮತ್ತು b ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

29. $y = (\log x)^x$ ಆದರೆ $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

30. $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right]$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

31. $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t^2}{1+t^2}$ ಆದರೆ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

32. $y = \sin^{-1}[\cos(\sin x)]$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಎಷ್ಟು?

33. $f(x) = (x^3+3x^2+1)(x^2+2)$ ಆದರೆ $f'(-1)$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

34. $y = \tan^{-1}(\sin x) + \tan^{-1}(\mathrm{cosec}\, x)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

35. $f(x) = xe^x$ ಆದರೆ $f(x)$ ನ ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

36. $y = \frac{2\cos^2 x-1}{1-2\sin^2 x}$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

37. $y = \tan^{-1}\left[\frac{3x-x^3}{1+3x^2}\right]$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

38. $y = \sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\right)$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

39. $\cos^{-1}2x + \cos^{-1}y = \pi$ ಆದರೆ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

40. $y = \log\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ ಆದರೆ, $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

41. $x^y = e^x$ ಆದರೆ, $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

42. $y = \log_2(3x^2-5x+8)$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

43. $y = \sin^{-1}(\log x)$ ಆದರೆ, $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

44. $y = \sin^{-1}(\tan x)$ ಆದರೆ, $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

45. $\sqrt{x}$ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ax}}\right)$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

46. $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\ldots}}}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

47. $y = \cos\{2\sin^{-1}(\cos x)\}$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

48. $x^2+y^2 = x^2y^2$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

49. $x = a(\theta-\sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ ಆದರೆ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ನಲ್ಲಿ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

50. $\dfrac{x}{y} = \log(xy)$ ಆದರೆ $\dfrac{dy}{dx}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4.2 ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಅನ್ವಯಗಳು

1. $y = x^3+3x^2+1$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು (1,5)ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $xy = 4$ ಮತ್ತು $x^2-y^2 = 15$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು (–4, –1)ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $y = 3x - x^2$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಓಟ –5 ಆಗಿರುತ್ತದೆ?

4. x ನಲ್ಲಿ x^x ಉತ್ಪನ್ನದ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ವೇಗ $v = 3t^2 + t$ ಇದ್ದರೆ $t = 2$ ಆದಾಗ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x^2 - 3xy + y^2 = 0$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಉಪಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು (1, –2)ನಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯರಿ.

7. $y = 2^x$ ಮತ್ತು $y = 3^x$ ಎಂಬ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಲಘುಕೋನ θ ಆದರೆ $\tan\theta$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. 100 ಚ. ಮೂಲಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಆಯತದ ಕನಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $s = t^n$ ಆಗಿ, $t = 3$ ಆದಾಗ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ ಎರಡೂ ಸಮವಾದರೆ n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯರಿ.

10. $y = x^2 + ax$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು (3, 2) ಮತ್ತು (–1, 6) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, aಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $e^{\sin x}$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯರಿ.

12. $s = \frac{1}{3} t^3$ ಮತ್ತು $v^3 = ks^2$ ಆದರೆ k ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ನಲ್ಲಿ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ಬುಲೆಟನ್ನು ಕ್ಷಿತಜದಲ್ಲಿ ಹಾರಿಸಿದಾಗ t ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅದು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು $S = 1280t - 16t^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬಹುದಾದರೆ ಅದನ್ನು ಹಾರಿಸಿದ ವೇಗವೆಷ್ಟು?

15. a, b, x ಎಲ್ಲವೂ ಧನ ಆದಾಗ $ax + \frac{b}{x}$ ನ ಕನಿಷ್ಠಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

16. $x = 4a\cos^3\theta$, $y = 4a\sin^3\theta$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $xy = 25$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x– ಮತ್ತು y–ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. OAB ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $y = x(x^2-4)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು $(2, 0)$ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಅವೆರಡರ ಮಧ್ಯೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯರಿ.

20. $y = \log x$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾದುಹೋದರೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. $x^2+y^2 = a^2$ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ (a, b) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. $x^3+y^3+3xy+x^2+2x+3y = 0$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. xe^x ಉತ್ಪನ್ನದ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

25. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು x ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತಲಾ $\left(3-\frac{x}{1000}\right)$ ರೂ. ಗಳಂತೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಈ ವಸ್ತುಗಳ ಒಟ್ಟು ಅಸಲು ಬೆಲೆ $\left(100+\frac{x}{2}\right)$ ರೂ. ಆಗಿದೆ, ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭ ಉಂಟಾಗಬೇಕಿದ್ದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

4.3 ಅನುಕಲನ

1. x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\frac{1}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$ ನ ಅನುಕಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\int \frac{\tan^2 x-1}{\tan^2 x+1}\,dx$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\int \frac{dx}{4x^2+1}$ ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

4. $\int a^x e^x dx =$ ——

5. $\int \frac{x+1 \quad dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

6. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log x}} dx$ ನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\int \frac{1+x\log x}{x} e^x dx$

(b) $\int \frac{x^4+1}{x^2} dx$

(c) $\int \frac{2x^2 dx}{(2+x^3)^2}$

8. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{8+\sin^2 x}}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $\int x \sinh x \, dx$ ಬೆಲೆ ಏನು?

10. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: $\int \frac{x^5 dx}{1+x^{12}}$

11. x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\frac{\cot x}{\log \sin x}$ ನ ಅನುಕಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx =$ ——

13. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\int(\sin^2 x + \cos^2 x)dx$

(b) $\int \frac{1}{1-x} dx$

(c) $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$

(d) $\int \frac{10x^9 + 10^x \log 10}{10^x + x^{10}} dx$

(e) $\int \frac{2x^3}{4 + x^8} dx$

(f) $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$

(g) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$

(h) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log x}}$

(i) $\int \frac{4\sin^3 x dx}{\cos^5 x dx}$

(j) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$

(k) $\int \frac{dx}{8-x^2}$

(l) $\int_{1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

14. $\int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\frac{x^{e-1} + e^{x-1}}{x^e + e^x}$ ಅನುಕಲನದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲವನ್ನು, x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಈ ಅನುಕಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx$

(b) $\int \frac{(1-x^2)^{-1/2}}{\sin^{-1} x}\, dx$

(c) $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$

(d) $\int x^2 e^x\, dx$

(e) $\int \frac{\sin x}{(a + b \cos x)^2}\, dx$

4.4 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನ

1. ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots\frac{1}{n+n}\right\}$$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x}$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

(v) $\int_{-1}^{1} (1-x^2+2x^3)\, dx$

(vi) $\int_{0}^{5} \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}$

(vii) $\int_{0}^{1} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}\, dx$

(viii) $\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x \log \tan x\, dx$

(ix) $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{\log t}}{t}\, dt$

(x) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$

3. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಆದಿವೇಗ 5 ಸೆಂ. / ಸೆಕೆಂಡ್ ಇದೆ ಮತ್ತು ಕಾಲವು t ಆದಾಗ ಅದರ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು t^2+2t+1 ಆಗಿದೆ. ಕಾಲ t ಆದಾಗ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ವೇಗ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $y = 4x - x^2$ ವಕ್ರ ರೇಖೆಗೂ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $xy = 1$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆ, x–ಅಕ್ಷ, x=1 ಮತ್ತು x=2 ನಲ್ಲಿನ y– ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು A_1 ಎಂದೂ, x–ಅಕ್ಷ , x=2, x=4 ಗಳಲ್ಲಿನ y–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು A_2 ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, A_1 ಮತ್ತು A_2 ಗಳ ಸ್ವಭಾವದ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ.

6. $f(x) = x$ ಆದರೆ, $\frac{d}{dx}\left[\int_{a}^{b} f(x)\, dx\right]$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ವಕ್ರರೇಖೆ $y^2 = 4x$ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆ $3y = 2x + 4$ ಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ ವಕ್ರರೇಖೆ, x– ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು $x = 0$, $x = 4$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

9. $y = x^3$, $x = 0$ ಮತ್ತು $y = 8$ ಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ?

10. ಕಾಲ t ಆದಾಗ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ $6t^2$ ಇದೆ. ಬಿಂದುವು ವಿಶ್ರಾಂತಿ ಸ್ಥಿತಿಯಿಂದ ಚಲಿಸಿದರೆ, $t = 2$ ಆದಾಗ, ಅದರ ವೇಗ ಎಷ್ಟು?

11. $y = x^2 + 1$ ಮತ್ತು $y = 2x+1$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ?

12. ಇದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\int_0^1 (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\, dx$$

13. ಇದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\int_0^{\sqrt{\log 2}} x e^{x^2} dx$$

14. $\frac{1}{5}(x^{10}-1) = \int_0^{f(x)} (t+1)^4\, dt$ ಆದರೆ $f(x)$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $\int_{-1}^{1} (x^3 + 1)^2\, x^2\, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯ ಉತ್ತರಗಳು

1.1

1. { (1,–1), (1,1), (2,-1), (2,1)}; { (1,-1), (1,0), (1,1), (2,-1), (2,0), (2,1)}; ಹೌದು

2. {(3,2), (3,5)}

3. (4,–8)

4. {(2,3), (2,5), (2,7), (2,9), (3,2), (3,4), (3,5), (3,7), (3,8), (4,3), (4,5), (4,7), (4,9), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (5,7), (5,8), (5,9), (6.5), (6,7), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,8), (7,9), (8,3), (8,5),(8,7), (8.9), (9,2), (9,4), (9,5), (9,7), (9,8),}

5. R^{-1} { (5.4), (4,1), (7,4), (6,7), (3,7)}

6. R ಆತ್ಮವರ್ತಕ

7. 11,5

8. 11

9. $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$; $f^{-1}(y) = (y-5)^{1/3}$

10. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

1.2

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 \\ 15 & \frac{21}{4} \end{pmatrix}$

3. $x = 1$, $y = -4$

5. $\begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{-3}{2} & -6 \end{pmatrix}$

7. $x = -1$

9. $(0 \quad 10 \quad -8 \quad 3)$

10. A^{-1}

11. –3

12. 0

13. 6,4

14. 0

15. 0

16. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

18. 0

19. 3

20. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

21. (0,–1)

22. –2

23. (3, –1)

24. (1,2,3)

25. $3A$

26. -2

27. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

28. 3×7

29. $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$

30. A^2

1.3

1. (2,1)

2. (2,3,7), (–1,–1,1)

3. $x = 2, \ y = 3$

4. $\vec{A} + |\vec{A}|$

5. $\vec{0}$

6. $4\vec{OG}$

7. 3

8. $\sin^{-1} \sqrt{25/26}$

9. 3

10. $4\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$

11. $\frac{1}{7}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$

12. $\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}$

13. 90°

14. $\frac{1}{6}$

15. 40

16. –9

17. $5\sqrt{2}$

18. $2\sqrt{10}$ ಚದರಮಾನಗಳು

19. $\frac{2}{\sqrt{7}}$

20. $\frac{\pi}{2}$

21. 8

22. $\sqrt{213}$

23. $\sqrt{30}$

24. $\frac{2}{3}(\hat{j}-\hat{k})$

25. $\frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}$

26. -6

27. 1

28. 18

29. 2

30. 2

1.4

2. ω^2

4. ಏಕದ ನಿಯಮವು ತೃಪ್ತಿಯಾಗಿಲ್ಲ

5. 5 ಮತ್ತು $\frac{25}{8}$

6. 71

7. $1, -1, i, -i$

9. $a=e$

11. e

15. 2,5

17. $\cos\theta - i\sin\theta$

18. 1

20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.1

1. $x^2 + y^2 = 1$

2. $a(1+m^2)$

3. $(-g, -f)$

4, $c<a\sqrt{(1+m^2)}$

5. $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 16$

6. 60

7. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 16 = 0$

8. $\frac{9}{4}$

9. 1

11. $(2,2), \sqrt{10}$

12. $2x^2 + 2y^2 - x - 47 = 0$

13. $x^2 + y^2 + x - 12y + 23 = 0$

14. (4,3), (1,0)

15. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$

16. $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0.$

17. $\frac{-3}{4}$

18. $x^2 + y^2 - 6x = 0$

19. $x\sqrt{3} - y = 4 + 3\sqrt{3}$

20. $3x + 4y = 0$

21. $x + y = 0$

22. $4x - 3y + 25 = 0$

23. (5,1)

24. $x^2 + y^2 = a^2$

25. $2y - 5 = 0$

26. 4

27. $\frac{\pi}{2}$

28. (2,–4)

29. $7x + 6y = 85$

30. $K = -4$

2.2

1. 8
2. (–1,–2)
3. $\frac{8}{3}$
4. (2,6)
5. (½, 2)
6. $y = -3$
7. $c = am$
8. ದೀರ್ಘವೃತ್ತ
9. $e = ½$
10. $e = \frac{1}{6}$
11. $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$
12. $x - yt + at^2 = 0$
13. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
14. $b^2 = a^2(1-e^2)$
15. $\frac{8}{5}$
16. 6
17. $10\sqrt{2}$
18. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

19. (4,–1) ಮತ್ತು (–2,–1)

20. $\frac{2}{3}$

21. $x^2 + \frac{y^2}{\frac{15}{16}} = 1$

22. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{2}} = 1$

23. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{28} = 1$

24. $\frac{a^2(x-x_1)}{x_1} - \frac{b^2(y-y_1)}{y_1} = 0$

25. $\frac{1}{4}$

26. $p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha$

27. $\frac{x^2}{\left(\frac{441}{65}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{49}{4}\right)} = 1$

28. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

29. $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$

30. $\frac{10}{3}$

31. $2 \tan^{-1} \frac{b}{a}$

32. $2x^2 - 3y^2 = 5$

33. (6,3) ಮತ್ತು (2,3)

34. (7,1) ಮತ್ತು (3,1)

35. $\frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{6} = 1$

36. $\pm \frac{9}{4}$

37. 12

38. $x+y-4=0$

39. 12

40. $x+2y-6=0$

3.1

2. $\frac{7}{25}$

9. $x = \frac{1}{6}$

10. 0,½

11. $\frac{5\pi}{6}$

12. $\frac{56}{65}$

13. 0

14. 180°

15. $4 \frac{\sqrt{5}}{9}$

16. 1

17. $\tan^{-1} \frac{5}{12}$

18. $\frac{\pi}{4}$

19. $\sin^{-1}(1)$

20. $\frac{\pi}{4}$

3.2

1. 1

2. $x = 3, y = 18$

3. 32

4. 0

5. $-1, \frac{-\pi}{2}$

7. $\cos\frac{m\pi}{6} + i\sin\frac{m\pi}{6}$

8. 2

9. $\frac{-2}{5} + \frac{4}{5}i$

10. $\cos 9\theta$

11. $2i\sin 3\theta$

12. $\cos\theta - i\sin\theta$

13. $2\cos\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}$

14. -19

15. -1

16. -1

17. $2\cot^{-1}a$

18. -1

19. $2i \sin 2\theta$

20. $12^{5/7} \sin \frac{5\pi}{4}$

21. ± 2

22. $16\sqrt{3}\,i$

23. 0

4.1

1. 6

2. 0

3. $\sqrt{2}$

4. $2x+3$

5. $3a^{2/3} \cos a$

6. $\sin^2 x - \sin^2 y$

7. $\sin(a-x) + \cos(a-x)$

8. 1

9. 8

10. $2h / (x+h+1)(x+1)$

11. 0

12. $\frac{-2}{x^2}$

13. $\frac{\cot x}{\log \sin x}$

14. $\frac{1}{2}$

15. $\dfrac{-1}{x(\log x)^2}$

16. $\dfrac{-4x}{(1-x^2)^2}$

17. $2x$

18. $2e^x \cos x$

19. $\dfrac{-y}{x}$

20. $5^x \log 5$

21. $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$

22. 0

23. $\dfrac{y}{x}$

24. $\dfrac{y\sqrt{y^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}}$

25. $\dfrac{-1}{a}$

26. -1

27. 0

28. 5,3

29. $\log(\log x) + \dfrac{1}{\log x}$

30. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

31. 0

32. $-\cos x$

33. -15

34. 1

35. $2e^x + xe^x$

36. 0

37. $\dfrac{3a}{a^2 + 9x^2}$

38. $\dfrac{2}{4+x^2}$

39. 0

40. $-\operatorname{cosec} x$

41. $\dfrac{x-y}{x \log x}$

42. $\dfrac{\log_2 e\,(6x-5)}{3x^2 - 5x + 8}$

43. $\dfrac{1}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}$

44. $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

45. $\dfrac{1}{1+x}$

46. $\dfrac{\cos x}{2y-1}$

47. $2 \sin (2x)$

48. $\dfrac{-y^3}{x^3}$

49. $\dfrac{-1}{a}$

50. $\frac{-y^2}{x^2}$

4.2

1. 9
2. 90°
3. (4,–4)
4. $\frac{1}{e}$
5. 13
6. $\frac{16}{7}$
7. $\frac{\log 3 . \log 2}{1 + \log 3 \log 2}$
8. 40
9. 4
10. –1
11. $\frac{\pm\pi}{2}$
12. 9
13. a
14. 1280
15. $2\sqrt{ab}$
16. $\sqrt{2}a$
17. 50
18. $\tan^{-1}(8)$
19. $\frac{3a}{8}$

20. $(e, 1)$

21. $x - a = 0$

22. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$

23. $2x + 3y = 0$

24. 0

25. 1250

4.3

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ C ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ (14 ನೇ ಮತ್ತು 13 (c), (l) ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ).

1. $-\cot x$

2. $-\frac{1}{2} \sin 2x$

3. $\frac{1}{2} \tan^{-1} 2x$

4. $\dfrac{e^x a^x}{\log (ae)}$

5. $\sqrt{x^2 + 2x + 5}$

6. $-2\sqrt{1 - \log x}$

7. (a) $e^x \log x$

   (b) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x}$

   (c) $\dfrac{-2}{3(x^3+2)}$

8. $-\sin^{-1} \left(\dfrac{\cos x}{3}\right)$

9. $x \cosh x - \sinh x$

10. $\dfrac{1}{6} \tan^{-1} (x^6)$

11. $\log(\log \sin x)$

12. $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan-1\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$

13.(a) x

(b) $\log \frac{1}{1-x}$

(c) $\frac{\pi}{4}$

(d) $\log(10^x + x^{10}) + c$

(e) $\frac{1}{4} \tan^{-1}\left(\frac{x^4}{2}\right) + c$

(f) $2 \sin \frac{x}{2} - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c$

(g) $\frac{1}{3} \tan 3x$

(h) $-2\sqrt{1-\log x} + c$

(i) $\tan^4 x + c$

(j) $\log c^2 \sqrt{e^x - 1/e^x + 1} + c$

(k) $\frac{1}{4}\sqrt{2} \log\left(2\sqrt{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} - x\right) + c$

(l) $\frac{\pi}{8}$

14. π

15. $\frac{1}{e} \log(e^x + x^e)$

16. ½ $\log(e^{2x} + e^{-2x})$

17. $-e^{1/x}$

18.(a) $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2}$

(b) $\log(\sin^{-1}x)$

(c) $\log(e^x+1)$

(d) $(x^2-2x+2)\,e^x$

(e) $\frac{1}{b\,(a+b\cos x)}$

4.4

1. $\log 2$

2.

(i) $\frac{\pi}{3}$

(ii) π

(iii) $\frac{\pi}{4}$

(iv) $\frac{\pi}{2\,ab}$

(v) $\frac{4}{3}$

(vi) $\frac{5}{2}$

(vii) $2-\sqrt{2}$

(viii) 0

(ix) 2/3

(x) $\sqrt{13}-\sqrt{10}$

3. $\left(\frac{t^3}{3}\right)+t^2+t+5$

4. $\frac{32}{3}$

5. $A_1 = A_2$

6. 0

7. $\frac{13}{3}$

8. $\frac{8}{3}$

9. 12

10. 16

11. $\frac{4}{3}$

12. 1

13. $\frac{1}{2}$

14. $x^2 - 1$

15. $\frac{8}{9}$

ಗಣಿತ

ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆ

ಎರಡನೆಯ ಪಿ.ಯು.ಸಿ.

ಆವಧಿ 3 ಗಂ. ಅಂಕಗಳು 100

I ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ. (12x1 = 12)

1. $f: R \to R$ ನ್ನು $f(x) = 3x+1$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದೆ. $f(x)$ ಒಂದು - ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2. 2 ಎನ್ನುವುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, 2 ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುದು. ಇದರ ವಿಲೋಮ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ

   x,y,z ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $a * b = a+b-ab$ ಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತವಾದ * ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, 1 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗಣದ ಏಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 27y - 2 = 0$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $\sin^{-1}[(\sin(-600^\circ)]$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $1-i$ ನ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಕೋನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $f(x) = |x|$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $e^x + x^e + e^e$ ಇದನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನುಕಲಿಸಿ.

$$\int_1^2 \log x \, dx$$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $\int_1^2 \log x \, dx$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $9x^2 - 4y^2 = 36$ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\vec{F} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ಬಲದಿಂದ $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

II ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ. $12 \times 2 = 24$

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉಕ್ತಿಯ ಸತ್ಯಬೆಲೆಯ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ :
$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ

$(AB)^1 = B^1A^1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

ಆದರೆ $\vec{a}$ ಸದಿಶದ ಮೇಲೆ $\vec{b}$ ಯ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. G ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. 10ರ ಮಾಡ್ಯುಲೊ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ (2,4,6,8) ಸಂಕುಲದ ಏಕವನ್ನು ಮತ್ತು 4 ರ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬಾತ್ಮಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
$x^2+y^2-2x+22y+3 = 0$ ಮತ್ತು
$x^2+y^2+14x+6y+k = 0$

7. ನಾಭಿಯು $(-3, 2)$ ಇದ್ದು ಶೃಂಗವು $(-2, 2)$ ಇರುವ ಪ್ಯಾರಾಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:

$$\frac{(\cos 6\theta - i \sin 6\theta)^3 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^7}{(\cos 4\theta - i \sin 4\theta)^2}$$

9. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಚಲನೆಯ ನಿಯಮವು

$s = ae^{t} + be^{-t}$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು ಚಲಿಸಿದ ದೂರ sಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $\int u \,.\, dv = uv - \int v.\, du$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ ಕೋ–ಆಕ್ಸಲ್ ವೃತ್ತಗಳ ಮಿತಿಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. y – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಗುಂಪಿನ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

III. 1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಯುಕ್ತವಾಕ್ಯವು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೇ ಅಥವಾ ಅಸಮಂಜಸತೆ ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ:

$p \rightarrow (p \vee q)$

2. ಕೇಲಿ - ಹ್ಯಾಮಿಲ್‌ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಲೋಮ ಕೋಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ಅಥವಾ

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2\,(a+b+c)^3$$ 4

3. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $\hat{j} + 2\hat{k},\ 2\hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} - 3\hat{k}$ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

4. $\{1,2,3\}$ ಗಣದ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಗಣವು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದಂತೆ ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಅಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 4

IV. 1. $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿರುವ (x^1, y^1) ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣೇಯವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. (5,3), (1,5) ಮತ್ತು (3,–1) ಬಿಂದುಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಥವಾ

(–3,1) ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ, (–1,4) ರ ಮುಖಾಂತರ ಹಾದು ಹೋಗುವ, ಅಕ್ಷಗಳು ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯು ½ ಆಗಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

3. ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ. 4

V.

1. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ ಆದರೆ

$x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

ಅಥವಾ

$\sin\theta+\sin3\theta+\sin5\theta+\sin7\theta=0$ ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\sqrt{3}-i$ ಇದರ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಆರ್‌ಗ್ಯಾಂಡ್ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ.

VI.

1. xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\operatorname{cosec} ax$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಥವಾ

xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $(\sin x)^x - x^{\sin^{-1} x})$ ನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ 4

2. $x = \sin t$, $y = \cos pt$ ಆದರೆ $(1-x^2)\, y_2 - xy_1 + p^2 y = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3. $x^5 = ay^6$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಉಪಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ವರ್ಗವು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯ ಘನದ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಥವಾ

ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಭುಜದ ಉದ್ದದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ ಈ ಎರಡೂ ಭುಜಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $\frac{\pi}{3}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 4

VII.

1. x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನುಕಲಿಸಿ: 4

$$\frac{2\cos x - 3\sin x}{\cos x + 4\sin x}$$

2. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx$$

ಅಥವಾ

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅನುಕಲನದ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

3. ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದಾದ ಚರಗಳ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಹರಿಸಿ. 4

$$e^x \tan y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$$

VIII. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a>b)$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಾದರೆ, P ಯಿಂದ ನಾಭಿಗಳಿಗೆ ಇರುವ ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

ಬದಲಿ ಆಯ್ಕೆಗಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನ

I ಬೀಜ ಗಣಿತ

ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

II. ನಿರ್ದೇಶಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿ.

ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಶಂಕುಜಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

III. ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ

ವಿಲೋಮ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

2. ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಅನ್ವಯಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

IV. 1. ಅವಕಲನ

ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ, ಅವಕಲ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಅವಕಲನ ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ.

V. ಅನುಕಲನ

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನದ ಅನ್ವಯಗಳ ನಡುವೆ ಆಯ್ಕೆ

ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆ ತಯಾರಕರಿಗೆ ಸೂಚನೆ.

ಪ್ರಶ್ನೆ I (11) ಮತ್ತು (12)

ಪ್ರಶ್ನೆ II (11) ಮತ್ತು (12)

ಪ್ರಶ್ನೆ VIII ಇವುಗಳನ್ನು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ 1 ರಿಂದ 10 ವಿಷಯಗಳಿಂದ ಆರಿಸಬೇಕು.

ಕನ್ನಡ - ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಕೋಶ

ಅಡ್ಡ ಸಾಲು	Row
ಅದಲು ಕೋಶ	Transpose matrix
ಅದಿಶ	Scalar
ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ	Scalar product
ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Prime number
ಅನನ್ಯತಾಂಶ	Identity eiement
ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ	Indefinite integral
ಅನುಕಲ	Integral
ಅನುಕಲನ	Integration
ಅನುಕಲನದ ಮಿತಿಗಳು	Limits of integration
ಅನುಕಲನದ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ	Constant of integration
ಅನುಕಲೀಯ / ಅನುಕಲ್ಯ	Integrand
ಅನುಚಿತ ಉಪಗಣ	Improper subset
ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷ	Transverse axis
ಅನುವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	Conjugate
ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ	Conjugate axis
ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕ	Asymptote
ಅಪರಿಮಿತ	Infinite
ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನ	Implicit function
ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ	Abelian group
ಅರೆಸಂಕುಲ	Semigroup
ಅರ್ಧನಾಭಿಲಂಬ	Semi-latus rectum
ಅವಲಂಬಿಸಿರುವಂತೆ	With respect to
ಅವಕಲನ	Differentiation
ಅವಕಲ್ಯ	Differentiable
ಅವಕಲ್ಯತೆ	Differentiability
ಅವಕಲನ ಸಹಾಂಕ	Differential coefficient
ಅವಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ	Differential calculus
ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ	Differential equation
ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ	Continuity
ಅವ್ಯೈಶೇಷಿಕ	Nonsingular
ಅಸಮಂಜಸತೆ	Contradiction
ಅಸ್ತಿತ್ವ	Existence
ಅಂಗ	Component
ಅಂತರ	Interval, difference
ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸು	Inscribe
ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ	If and only if (iff)
ಆತ್ಮವರ್ತಕ	Reflexive
ಆದೇಶಕ್ರಮ	Substitution method
ಆಯತ	Rectangular
ಆಯಾಮ	Dimension
ಆವೃತ ಗುಣ	Closure property
ಆಂತರಿಕ	Internal
ಉಕ್ತಿ	Proposition
ಉತ್ಪನ್ನ	Function
ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ	Integral of a function
ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನ	Function of function
ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ	Eccentricity
ಉಪಕೋಶ	Submatrix
ಉಪಗಣ	Subset
ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ	Subtangent
ಉಪಲಂಬರೇಖೆ	Subnormal
ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆ	Imaginary number
ಋಣ ಉತ್ಪನ್ನ	Negative function
ಎಡಮಿತಿ	Left hand limit
ಎರಡನೆಯ ಅವಕಲಸಹಾಂಕ	Second differential coefficient
ಎಲಿಪ್ಸ್	Ellipse
ಏಕ	One, unity, identity element
ಏಕ—ಏಕ	One–one
ಏಕತಲಸ್ಥ	Coplanar
ಏಕದ	Identity element
ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ	Concurrent
ಏಕಮೌಲ್ಯ	Single-valued
ಏಕಮಾನ ಕೋಶ	Unit matrix
ಏಕ ಸದಿಶ	Unit vector
ಏಕೈಕ	Unique
ಐಕ್ಯಧಾತು	Identity element
ಒಳಗಣ	Into
ಓಟ	Slope
ಕನಿಷ್ಠ	Minimum
ಕೆಲಸ	Work
ಕೋನಾಂಕ (ಪಾರ)	Amplitude

ಕೋಶ Matrix
ಕಂಬಸಾಲು Column
ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ Ordered pair
ಕ್ರಮಯೋಜನೆ Permutation

ಕ್ಷಿತಿಜ Horizon
ಕ್ಷೀಣಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ Decreasing function
ಕ್ಷೇತ್ರ Field

ಗಣಾಂಶ, ಅಂಶ Element of a set
ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ Multiplicative inverse

ಘಟಕ Component
ಘಾತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ Exponential function

ಚರ Variable
ಚಾಲಕ Directrix
ಚಿತ್ರಣ Map

ಛಾಯೆ Image
ಛೇದನ Intersection

ಜ್ಯಾ Chord

ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆ Logical equivalence
ತೆರೆದ ಅಂತರ Open interval
ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ Trapezium

ದರ ಮಾಪಕ Rate measure
ದರ್ಜೆ Order
ದಿಶಾಕ್ಷ Directrix
ದೀರ್ಘವೃತ್ತ Ellipse
ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ Major axis
ದ್ವಿಬಂಧಿತ Biconditional
ದ್ವಿಮಾನ (ಪರಿ)ಕ್ರಿಯೆ Binary operation

ಧನಬೆಲೆ Postive value
ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ Modulus
ಧ್ರುವೀಯ Polar

ನಕಾರ Negation
ನಾಭಿ Focus
ನಾಭಿ(ಜ)ಲಂಬ Latus rectum
ನಾಭಿಜ್ಯಾ Focal chord
ನಿತ್ಯ ಸತ್ಯ Tautology
ನಿಬಂಧಿತ Implication, conditional
ನಿರಸನ Cancellation

ನಿರೂಪಿಸು Define
ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ Particular integral, definite integral
ನಿರ್ದೇಶಕ Coordinate
ನಿರ್ಧಾರಕ Determinant
ನಿರ್ಬಂಧ Condition
ನಿಷ್ಪನ್ನ, ನಿಷ್ಪತ್ತಿ Derivalive
ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯ Derivable
ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ Differentiate

ಪರವಲಯ Parabola
ಪರಿಕರ್ಮ Operation
ಪರಿಮಾಣ Manitude, order
ಪರಿಮಿತಿ Finite
ಪರಿವರ್ತನೀಯ Commutative, abelian
ಪರಿಹಾರ Solution
ಪರ್ಯಾಯ Disjunction

ಪಾರ Amplitude
ಪೂರಕ Complement
ಪೂರೈಕೆ Satisfaction

ಪ್ರಗಣನೀಯ Denumerable
ಪ್ರತಿಧನ Contrapositive
ಪ್ರತಿಫಲನ Reflexivity
ಪ್ರತಿಲೋಮ (ತರ್ಕದಲ್ಲಿ) Inverse (in logic)
ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶ Inverse matrix
ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ Principal value
ಪ್ರಮಾಣ, ಮಟ್ಟ Degree
ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ Parametric function

ಬಲದ ಮಹತ್ವ Moment of a force
ಬಲಮಿತಿ Right hand limit
ಬಲತಿರುವು ವ್ಯವಸ್ಥೆ Right handed system
ಬಹುಘಾತಪದಿ Polynomial
ಬಾಗು Inclination
ಬಾಹ್ಯ External
ಬೀಜಗಣಿತದ ಉತ್ಪನ್ನ Algebric function
ಬಿಂಬ Image
ಬಿಂಬಗಣ, ವ್ಯಾಪ್ತಿ Range
ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ Odd function
ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ Integration by parts

ಮಾತೃಕೆ Matrix
ಮಿತಿ Limit

ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Complex number
ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ	Closed Interval
ಮೂಲಬಿಂದು	Origin
ಮೂಲಮಾನ	Unit
ಮೂಲಾಕ್ಷ	Radical axis
ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ	Radical centre
ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನ	Differentiation from first principles
ಮೇರೆ	Bound
ಮೇಲಣ	Onto
ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ	Binary operation
ಯುಗ್ಮ	Couple
ಯುಗ್ಮಿತ	Conjugate
ರೇಖೀಯ	Linear
ಲಾಕ್ಷಣಿಕ	Characteristic, eigen
ಲಾಘವ	Minor
ಲಂಬ	Normal
ಲಂಬ ವೃತ್ತಗಳು	Orthogonal circles
ಲಂಬಾತ್ಮಕ	Orthogonal
ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲ	Rectangular hyperbola
ವಕ್ರತೆ	Curvature
ವಲಯ	Ring
ವಾಹಕ	Transitive
ವಿಕಸನ	Expansion
ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ	Discontinuity
ವಿಲೋಪನ	Elimination
ವಿಲೋಪಿಸು	Eliminate
ವಿಲೋಮ (ತರ್ಕದಲ್ಲಿ)	Converse (in logic)
ವಿಲೋಮ ಧಾತು (ಅಂಶ)	Inverse element
ವಿಲೋಮ ವೃತ್ತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ	Inverse circular function
ವಿಶ್ಲೇಷಕದಂತೆ	Analytically
ವೃದ್ಧಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ	Increasing function
ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ	Acceleration
ವೈಶೇಷಿಕ	Singular
ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದ	Nonsingular
ವ್ಯಾಕೋಚನ	Expansion
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ	Definition
ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಅಂತರ	Interval of the range
ಶೂನ್ಯ	Zero
ಶೂನ್ಯಗಣ	Empty set
ಶೂನ್ಯಭಾಜಕ	Zero divisor
ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶ	Null vector
ಶೋಧಕ	Discriminant
ಶೃಂಗ	Vertex
ಶ್ರೇಣಿ, ಶ್ರೇಢಿ	Sequence
ಶಂಕುಛೇದ, ಶಂಕುಜ	Conic
ಶಂಕುಜಗಳು	Conics
ಷರತ್ತು	Condition
ಷಡ್ಭುಜ	Hexagon
ಸದಿಶ	Vector
ಸಮತೋಕ್ತಿ	Equivalence proposition
ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ	Even function
ಸಮಸಂಯೋಗಿ	Equivalent
ಸಮಾಂಗತೆ, ಸಮಮಿತ	Symmetric
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	Parallelogram
ಸಮಾಂತರುಪರಿಪದಿ	Parallelopiped
ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ	Equivalence relation
ಸಮುಚ್ಚಯ	Conjunction
ಸರಳ ಸಂಗತ ಚಲನೆ	Simple harmonic motion
ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ	Codomain
ಸಹಗುಣಕ	Coefficient, cofactor
ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ	Coaxial, coaxal
ಸಹವರ್ತನೀಯ	Associative
ಸಹವರ್ತಿ	Conjugate
ಸಾಲು	Row
ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಕಲ	General integral
ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸು	Generalise
ಸಾಂಖ್ಯಿಕ	Numercial
ಸಾಂತ	Finite
ಸುಲಭ ಉತ್ಪನ್ನ	Elementary function
ಸ್ಥಾನಸದಿಶ	Position vector
ಸ್ವತುಲ್ಯ	Reflexive
ಸಂಕುಲ	Group
ಸಂಗತ ಕೋಶ	Adjoint matrix
ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ	Compound proposition
ಸಂಯೋಗ	Union
ಸಂಯೋಜಕಗಳು	Connectives
ಸಂಯೋಜನೆ	Associate
ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ	Minor axis

ಇಂಗ್ಲಿಷ್ - ಕನ್ನಡ ಪಾರಿಭಾಷಕ ಪದಕೋಶ

Abelian group — ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ/ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ
Acceleration — ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ
Adjoint matrix — ಸಂಗತಕೋಶ
Algebraic — ಬೈಜಿಕ
Algebraic function — ಬೈಜಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ
Amplitude — ಕೋನಾಂಕ
Analytically — ವಿಶ್ಲೇಷಕದಂತೆ
Argument — ಕೋನಾಂಕ
Associate — ಸಂಯೋಜನೆ
Associative — ಸಹವರ್ತನೀಯ
Asymptote — ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕ
Biconditional — ದ್ವಿಬಂಧಿತ, ಸಮತೋಕ್ತಿ
Binary operation — ಯುಗಳ (ದ್ವಿಮಾನ) ಪರಿಕ್ರಿಯೆ
Bound — ಮೇರೆ
Cancellation — ನಿರಸನ
Characteristic — ಲಾಕ್ಷಣಿಕ
Chord — ಜ್ಯಾ
Closed interval — ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ
Closure property — ಆವೃತ ಗುಣ
Coaxial, coaxal — ಸಹ ಮೂಲಾಕ್ಷ
Codomain — ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ
Coefficient — ಸಹಗುಣಕ
Cofactor — ಸಹಗುಣಕ
Collinear — ಏಕರೇಖಸ್ಥ
Column — ಕಂಬಸಾಲು
Commutative — ಪರಿವರ್ತನೀಯ
Complement — ಪೂರಕ
Complex number — ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ
Component — ಅಂಗ (ಘಟಕ)
Compound proposition — ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ
Condition — ಷರತ್ತು, ನಿರ್ಬಂಧ
Conditional — ನಿಬಂಧಿತ
Conics — ಶಂಕುಜಗಳು
Conjugate — ಸಹವರ್ತಿ, ಯುಗ್ಮಿತ, ಅನುವರ್ತಿ
Conjugate axis — ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ
Conjunction — ಸಮುಚ್ಚಯ
Connectives — ಸಂಯೋಜಕಗಳು
Constant of integration — ಅನುಕಲನದ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ
Continuity — ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ
Contradiction — ಅಸಮಂಜಸತೆ
Contrapositive — ಪ್ರತಿಧನ
Converse (in logic) — ವಿಲೋಮ (ತರ್ಕದಲ್ಲಿ)
Co-ordinate — ನಿರ್ದೇಶಕ
Coplanar — ಏಕತಲಸ್ಥ
Couple — ಯುಗ್ಮ
Curvature — ವಕ್ರತೆ
Decreasing function — ಕ್ಷೀಣಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ
Define — ಸೃಷ್ಟಿಸು
Definite — ನಿರ್ದಿಷ್ಟ
Definite integral — ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ
Definition — ವ್ಯಾಖ್ಯೆ
Degree — ಪ್ರಮಾಣ, ಮಟ್ಟ
Denumerable — ಪ್ರಗಣನೀಯ
Derivable — ನಿಷ್ಪನ್ನಯೋಗ್ಯ
Derivative — ನಿಷ್ಪನ್ನ, ನಿಷ್ಪತ್ತಿ
Determinant — ನಿರ್ಧಾರಕ
Difference — ಅಂತರ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ
Differentiability — ಅವಕಲ್ಯತೆ
Differentiable — ಅವಕಲ್ಯ
Differential coefficient — ಅವಕಲನದ ಸಹಾಂಕ, ನಿಷ್ಪನ್ನ ಕಲನಾಂಕ
Differential calculus — ಅವಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ
Differential equation — ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ
Differentiate — ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ
Differentiation from first principles — ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನ
Dimension — ಆಯಾಮ
Directrix — ದಿಶಾಕ್ಷ, ಚಾಲಕ
Discontinuity — ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ
Discriminant — ಶೋಧಕ
Disjunction — ಪರ್ಯಾಯ
Domain — ಕ್ಷೇತ್ರ
Eccentricity — ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ

Eigen	ಲಾಕ್ಷಣಿಕ
Element	ಗಣಾಂಶ, ಅಂಶ
Elementary function	ಸುಲಭ ಉತ್ಪನ್ನ
Eliminate	ವಿಲೋಪಿಸು
Elimination	ವಿಲೋಪನ
Ellipse	ದೀರ್ಘವೃತ್ತ
Empty set	ಶೂನ್ಯಗಣ
Equivalence proposition	ಸಮತೋಕ್ತಿ
Equivalence relation	ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ
Equivalent	ಸಮಸಂಯೋಗಿ
Even function	ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ
Existence	ಲಭ್ಯ, ಅಸ್ತಿತ್ವ
Expansion	ವಿಕಸನ, ವ್ಯಾಕೋಚನ ವಿಸ್ತರಣ
External	ಬಾಹ್ಯ
Exponential function	ಘಾತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ
Field	ಕ್ಷೇತ್ರ
Finite	ಪರಿಮಿತ, ಸಾಂತ
Focal chord	ನಾಭಿಜ್ಯಾ
Focus	ನಾಭಿ
Force	ಬಲ
Function	ಉತ್ಪನ್ನ
Function of function	ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನ
General integral	ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಕಲ
Generalise	ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸು
Group	ಸಂಕುಲ
Hexagon	ಷಡ್ಭುಜ
Horizon	ಕ್ಷಿತಿಜ
Hyperbolic function	ಹೈಪರ್‌ಬೋಲೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ
Identity element	ಐಕ್ಯಧಾತು, ಏಕದ, ಏಕ ಅನನ್ಯತಾಂಶ
Iff (if and only if)	ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ
Image	ಛಾಯೆ, ಬಿಂಬ
Imaginary	ಊಹ್ಯ
Implication	ನಿಬಂಧಿತ
Implicit	ಅಪ್ರಕಟ
Improper set	ಅನುಚಿತ ಗಣ
Inclination	ಬಾಗು
Increasing function	ವೃದ್ಧಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ
Increment	ಹೆಚ್ಚಳ, ಹೆಚ್ಚುವರಿ
Indefinite integral	ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ
Infinite	ಅಪರಿಮಿತ, ಅನಂತ
Inscribe	ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸು
Integral	ಅನುಕಲ
Integral of a function	ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲ
Integrand	ಅನುಕಲ್ಯ, ಅನುಕಲೀಯ
Integration	ಅನುಕಲನ
Integration by parts	ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ
Internal	ಆಂತರಿಕ
Intersection	ಛೇದನ
Interval	ಅಂತರ
Interval of range	ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಅಂತರ
Into	ಒಳಗಣ
Inverse (in logic)	ಪ್ರತಿಲೋಮ (ತರ್ಕದಲ್ಲಿ)
Inverse circular function	ವಿಲೋಮ ವೃತ್ತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ
Inverse element	ವಿಲೋಮ (ಪ್ರತಿಲೋಮ) ಧಾತು
Inverse matrix	ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕೋಶ
Latus rectum	ನಾಭಿ(ಜ)ಲಂಬ
Left-hand limit	ಎಡಮಿತಿ
Limit	ಮಿತಿ
Limits of integration	ಅನುಕಲದ ಮಿತಿಗಳು
Linear	ರೇಖೀಯ
Logical equivalence	ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆ
Magnitude	ಪರಿಮಾಣ
Major axis	ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ
Map	ಚಿತ್ರಣ, ಉತ್ಪನ್ನ
Matrix	ಕೋಶ, ಮಾತೃಕೆ
Minimum	ಕನಿಷ್ಠ
Minor	ಲಾಘುವ
Minor axis	ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ
Modulus	ಪರಿಮಾಣ, ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ
Moment of a force	ಬಲದ ಮಹತ್ವ
Multiplicative inverse	ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ
Negation	ನಕಾರ
Negative function	ಋಣಬೆಲೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ

Nonsingular	ಅವೈಶೇಷಿಕ, ವೈಷೇಶಿಕವಲ್ಲದ
Normal	ಲಂಬ
Null vector	ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶ
Numerical	ಸಾಂಖ್ಯಿಕ
Odd function	ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ
One-one	ಏಕ–ಏಕ
Onto	ಮೇಲಣ
Open interval	ತೆರೆದ ಅಂತರ
Operation	ಪರಿಕರ್ಮ
Order	ದರ್ಜೆ, ಪರಿಮಾಣ
Ordered	ನಿಯೋಜಿತ
Ordered pair	ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ
Origin	ಮೂಲಬಿಂದು
Orthogonal	ಲಂಬಾತ್ಮಕ
Orthogonal circles	ಲಂಬ ವೃತ್ತಗಳು
Parabola	ಪರವಲಯ, ಪ್ಯಾರಾಬೋಲಾ
Parallelogram	ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ
Parallelopiped	ಸಮಾಂತರುಪರಿಪದಿ
Parametric function	ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ
Particular integral	ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲ
Permutation	ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
Polar	ಧ್ರುವೀಯ
Polynomial	ಬಹುಘಾತಪದಿ
Position vector	ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ
Positive value	ಧನ ಬೆಲೆ
Prime number	ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ
Principal value	ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ
Proposition	ಉಕ್ತಿ
Radical axis	ಮೂಲಾಕ್ಷ
Radical centre	ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ
Range	ಬಿಂಬಗಣ, ವ್ಯಾಪ್ತಿ
Rate measure	ದರ ಮಾಪಕ
Rectangular hyperbola	ಲಂಬೀಯ (ಆಯತ) ಹೈಪರ್ಬೋಲ
Reflexive	ಆತ್ಮವರ್ತಕ, ಸ್ವತುಲ್ಯ, ಪ್ರತಿಫಲನ
Right hand limit	ಬಲಮಿತಿ
Right handed system	ಬಲ ತಿರುವು ವ್ಯವಸ್ಥೆ
Ring	ವಲಯ
Row	ಅಡ್ಡ ಸಾಲು
Satisfaction	ಪೂರೈಕೆ
Scalar	ಅದಿಶ
Scalar product	ಅದಿಶ ಗುಣಲಬ್ಧ
Second differential coefficient	ಎರಡನೆಯ ಅವಕಲ ಸಹಾಂಕ
Semigroup	ಅರೆಸಂಕುಲ
Semi-latusrectum	ಅರ್ಧನಾಭಿಲಂಬ
Sequence	ಶ್ರೇಣಿ, ಶ್ರೇಢಿ
Simple harmonic motion	ಸರಳ ಸಂಗತ ಚಲನೆ
Single valued	ಏಕ ಮೌಲ್ಯ
Singular	ವೈಶೇಷಿಕ
Slope	ಓಟ
Solution	ಪರಿಹಾರ
Submatrix	ಉಪಕೋಶ
Subnormal	ಉಪಲಂಬರೇಖೆ
Subset	ಉಪಗಣ
Substitution method	ಆದೇಶ ಕ್ರಮ
Subtangent	ಉಪ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ
Symmetric, symmetry	ಸಮಾಂಗತೆ
Tautology	ನಿತ್ಯಸತ್ಯ
Transtitive	ವಾಹಕ
Transpose matrix	ಅದಲುಕೋಶ
Transverse axis	ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷ
Trapezium	ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ
Truth values	ನಿಜ ಮೌಲ್ಯ
Union	ಸಂಯೋಗ
Unique	ಏಕೈಕ
Unit	ಮೂಲಮಾನ
Unit matrix	ಏಕಮಾನ ಕೋಶ
Unit vector	ಏಕ ಸದಿಶ
Variable	ಚರ
Variables separable	ಬೇರ್ಪಡಿಸಬಹುದಾದ ಚರಗಳು
Vector	ಸದಿಶ
Vertex	ಶೃಂಗ
With respect to	ಅವಲಂಬಿಸಿರುವಂತೆ
Work	ಕೆಲಸ
Zero	ಶೂನ್ಯ
Zero divisor	ಶೂನ್ಯ ಭಾಜಕ

ಗ್ರಂಥ ಋಣ

1. ***Higher Algebra***, Hall & Knight, S. Chand & Co., New Delhi.

2. ***The Elements of Coordinate Geometry,*** S.L. Loney, Macmillan & Co. Ltd., London.

3. ***Plane Trigonometry,*** S.L. Loney, S. Chand & Co., New Delhi.

4. ***Differential Calculus,*** S. Balachandra Rao and C.K. Shantha, Wiley Eastern Ltd. (New Age International), New Delhi.

5. ***Differential Equations,*** S. Balachandra Rao and H.R. Anuradha, Universities Press, Orient Longman Ltd., Hyderabad.

6. ***Indian Mathematics and Astronomy - Some Landmarks,*** Dr. S. Balachandra Rao, Jnana Deep Publications, 2388, 13th Main, A-Block, Rajajinagar II Stage, Bangalore - 560 010.

7. *ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್,* ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್, ಕನ್ನಡ ಪುಸ್ತಕ ಪ್ರಾಧಿಕಾರ, ಚಾಮರಾಜಪೇಟೆ, ಬೆಂಗಳೂರು – 560 018.

8. *ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ,* ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್, ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ, ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ – 583 221.

ದ್ವಿತೀಯ ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ

ಘಟಕ – I ಬೀಜಗಣಿತ

1. ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ 3 ಗಂಟೆಗಳು

1.1 ಗಣಗಳು, ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ, ಲೆಕ್ಕಗಳು

2. ಗಣಿತ ತರ್ಕ 8 ಗಂಟೆಗಳು

2.1 ಉಕ್ತಿ ಮತ್ತು ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು, ಸಂಯೋಜಕಗಳು, ಅವುಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು, ಉಕ್ತಿಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ, ವಿಲೋಮ, ಪ್ರತಿಧನ, ನಿತ್ಯಸತ್ಯ ಮತ್ತು ಅಸಮಂಜಸತೆ, ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆ, - ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

3. ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು 12 ಗಂಟೆಗಳು

3.1 ವಿವಿಧ ನಮೂನೆಯ ಕೋಶಗಳು ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಗಳ ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ

3.2 ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು
$\Delta : M(2, R) \to R$ ಮತ್ತು $\Delta : M(3, R) \to R$
ಬಿಂಬನಗಳೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುದು.
ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಗಳು, ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ $\Delta(AB) = \Delta(A) . \Delta(B)$, ಲೆಕ್ಕಗಳು

3.3 ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದ ಲಾಘವ ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕ, ಸಂಗತಕೋಶ, ವೈಶೇಷಿಕ ಮತ್ತು ಅವೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶಗಳು, ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ.

$A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A = |A|$ ಇದರ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ A^{-1} ನ ಸೂತ್ರ, ಲೆಕ್ಕಗಳು

3.4 ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ (i) ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿ (ii) ಕ್ರೇಮರನ ನಿಯಮ, ಲೆಕ್ಕಗಳು

3.5 ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಸಮೀಕರಣ, ಚೌಕುಳಿಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳು, ಕೇಲಿ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯ (ಹೇಳಿಕೆ ಮಾತ್ರ).

ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ದರ್ಜೆಗಳ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೇಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು.

A^{-1} ಅನ್ನು ಕೇಲಿ ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಲೆಕ್ಕಗಳು

4 ಸದಿಶಗಳು 9 ಗಂಟೆಗಳು

4.1 ಸದಿಶವು ಒಂದು ದಿಗ್ಯುಕ್ತ ರೇಖಾಖಂಡವೆನ್ನುವುದನ್ನು ಪುನರ್ನಿರೂಪಿಸುವುದು. ಸದಿಶದ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ದಿಕ್ಕು, ಸಮದಿಶಗಳು, ಏಕಸದಿಶ, ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನಸದಿಶ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

4.2 ದ್ವಿ-ಆಯಾಮ ಮತ್ತು ತ್ರಿ-ಆಯಾಮ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿನ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಯುಗ್ಮಗಳೆಂದು ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾತ್ರಿವಳಿಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು. ಸದಿಶದ ಘಟಕಗಳು, ಸದಿಶಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಅದಿಶಗುಣಾಕಾರ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

4.3 ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶ.

4.4 ಎರಡು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರ, ಸದಿಶಗುಣಾಕಾರ, ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಅದಿಶ ತ್ರಿವಳಿಗುಣಾಕಾರ, ಸದಿಶ ತ್ರಿವಳಿಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳು. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ, ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ. ಸಮಾಂತರುಪರಿಪದಿಯ ಗಾತ್ರ – ಇದಕ್ಕೆ ಅವುಗಳ ಅನ್ವಯ. ಲಂಬಾತ್ಮಕ ಸದಿಶಗಳು, ಮೂರು ಸದಿಶಗಳ ಏಕತಲಸ್ಥತೆ, ಒಂದು ಸದಿಶದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದರ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣೆ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

4.5 ಕೆಲಸ, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಬಲದ ಮಹತ್ವ, ಒಂದು ಯುಗ್ಮದ ಮಹತ್ವ, ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರವಾಗಿ ದ್ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ, ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

5. ಸಂಕುಲಗಳು 12 ಗಂಟೆಗಳು

5.1 ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ, ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ರಚನೆಗಳು, ಅರ್ಧಸಂಕುಲ, ಸಂಕುಲ, ಪರಿವರ್ತನೀಯ (ಅಬಿಲಿಯನ್) ಸಂಕುಲಗಳ ವಿವರಣೆಗಳು.

ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಕುಲಗಳು, ಸಂಕುಲದ ಅಂಶಾಂಕ, "ಗುಣಾಕಾರ" ಅಥವಾ "ಪರಿಕ್ರಿಯೆ"ಯ ಪಟ್ಟಿ, ಮಾಡ್ಯುಲಾರ್ ಸಂಕುಲಗಳು, ಕೋಶಗಳ ಸಂಕುಲ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

5.2 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು, 3 ಗಣಗಳ ಸಮಾಂಗತ ಸಂಕುಲ, $S = \{1, 2, 3\}$ ಗಣದ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು, "ಗುಣಾಕಾರ"ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಅಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

5.3 1 ರ ವರ್ಗಮೂಲ, ಮೂರನೇ ಘಾತಮೂಲ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತಮೂಲ. ಇವುಗಳು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತ).

5.4 ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಗುಣಗಳ ಸಾಧನೆಗಳು :

(i) ಸಂಕುಲದ ಏಕಾಂಶವು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶದ ವಿಲೋಮವು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) G ಒಂದು ಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ, $(a^{-1})^{-1} = a, \; a \in G$

(iv) ಒಂದು ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

(v) ಒಂದು ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ನಿರಸನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ.

(vi) $a * x = b$ ಮತ್ತು $y * a = b$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದು ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

5.5 ಉಪಸಂಕುಲಗಳು, ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾಗುವ ನಿಯಮಗಳ ನಿರೂಪಣೆ

a. G ಸಂಕುಲದ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ H ಉಪಗಣವು ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ

(i) $\forall a,b \in H, a * b \in H$ ಮತ್ತು

(ii) H ಉಪಗಣದ ಪ್ರತಿ a ಗೆ, $a^{-1} \in H$

b. G ಸಂಕುಲದ ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣ H ಒಂದು ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ

$\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H.$

ಲೆಕ್ಕಗಳು.

5.6 ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಗಳು

(i) $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$ ಆದರೆ Gಯು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗುವುದು.

(ii) G ಸಂಕುಲವೊಂದರ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶವೂ ಅದರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, Gಯು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ.

(iii) ನಾಲ್ಕು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯ ಅಂಶಾಂಕ ಹೊಂದಿದ ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲವಾಗುವುದು.

(iv) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶಾಂಕ ಹೊಂದಿದ್ದ ಒಂದು ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ $a \neq e$ ಆದಾಗ, $a^{-1} = a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಘಟಕ - II ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

6. ವೃತ್ತಗಳು 12 ಗಂಟೆಗಳು

6.1 ವಿವರಣೆ, ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು (0,0) ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆದಾಗ ವೃತ್ತ ಸಮೀಕರಣ (x_1,y_1) ಮತ್ತು (x_2,y_2) ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ತುದಿಗಳಾದಾಗ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ, ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ, ಇವುಗಳೆರಡರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6.2 ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಲೆಕ್ಕಗಳು. $y = mx + c$ ಯು $x^2 + y^2 = r^2$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನಿಸುವ ನಿಯಮದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6.3 ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6.4 ಬಿಂದುವಿನ ಘಾತ, ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ, ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ–ನಿಷ್ಪತ್ತಿ–ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6.5 ಬಿಂದುವೊಂದು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಇರಲು ನಿಯಮ, ನಿರೂಪಣೆ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

"ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷವು ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಎನ್ನುವುದರ ನಿರೂಪಣೆ- ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6.6 ಲಂಬಾತ್ಮಕ ವೃತ್ತಗಳು -ನಿಯಮದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ-ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6.7 ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ, ಮಿತಿ ಬಿಂದುಗಳು, ಸಹವರ್ತಿವ್ಯವಸ್ಥೆ -ಲೆಕ್ಕಗಳು.

7. ಶಂಕುಜಗಳು **13 ಗಂಟೆಗಳು**

7.1 ನಾಭಿ–ಚಾಲಕಗಳ ಗುಣದಿಂದ (ಶಂಕುಜದ)ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ. ಪೆರಾಬೋಲಾ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತ, ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ ಮತ್ತು ಆಯತ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ ಇವುಗಳ ನಿರೂಪಣೆ.

7.2 ಪೆರಾಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ, ಇತರೆ ರೂಪಗಳ ಪೆರಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಹೇಳಿಕೆ ಮಾತ್ರ), ಪೆರಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಗುಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು

7.3 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ, ಇತರೆ ರೂಪಗಳ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಹೇಳಿಕೆ ಮಾತ್ರ), ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಗುಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

7.4 ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಸಮೀಕರಣದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ. ಇತರೆ ರೂಪಗಳ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಹೇಳಿಕೆ ಮಾತ್ರ), ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಪ್ರಮಾಣಕ ಗುಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

7.5 $y^2 = 4ax, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b), \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ಈ ಶಂಕುಜಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಘಟಕ - III ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

8. ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು 6 ಗಂಟೆಗಳು

8.1 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನದ ವಿವರಣೆ, ಪ್ರಾಂತ್ಯ, ಬಿಂಬಗಣ, ಪ್ರಮಾಣಕ ಸೂತ್ರಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

8.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು

9. ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು 4 ಗಂಟೆಗಳು

9.1 $\sin x = k$, $\cos x = k$, $\tan x = k$, $a \cos x + b \sin x = c$
ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳು, ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

10. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10 ಗಂಟೆಗಳು

10.1 ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಿಯೋಜಿತ ಯುಗ್ಮಗಳೆಂಬ ವಿವರಣೆ, ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳು, ಮಾಡ್ಯುಲಸ್, ಕೋನಾಂಕ, ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾನತೆ, ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ, ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧ್ರುವೀಯರೂಪ, ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲ ಅಥವಾ ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಸಮತಲ, ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘಾತೀಯರೂಪ -ಲೆಕ್ಕಗಳು.

10.2 ಡಿಮೋಯ್ವರನ ಪ್ರಮೇಯ - ನಿರೂಪಣೆ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆ, ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ, ಚತುರ್ಥಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧೀಕರಣ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಘಟಕ - IV ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

11 ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಅವಕಲನ 12 ಗಂಟೆಗಳು

11.1 ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ, ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತ, ಬಹುಘಾತ ಪದಿ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಘಾತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.2 ಅವಕಲನ - ಅವಕಲ್ಯತೆ, ಮೂಲ ತತ್ವ ದಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು. ಅವಕಲನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಅವಕಲನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದರ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಸ್ಥಿರ ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ - ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು. ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ x^n, e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$, $\log x$ ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು.

11.3 ಮೂಲತತ್ವದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು, ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಿಕ್ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಿಕ್ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.4 ಸಂಯುಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ಸರಪಣಿ ನಿಯಮ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.5 ಆದೇಶನದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಕಲನ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.6 ಅಪ್ರಕಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ, ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ, ಲಾಗರಿತಮೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ, ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಕಲನ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11.7 ಅನುಕ್ರಮ ಅವಕಲನ. ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

12. ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳ ಅನ್ವಯಗಳು 8 ಗಂಟೆಗಳು

12.1 dy/dx ರೇಖಾಗಣಿತ ರೀತ್ಯಾ ಅರ್ಥಕಲ್ಪನೆ, ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಲಂಬಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

12.2 ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಉಪಲಂಬರೇಖೆ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

12.3 ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ದರಮಾಪಕವಾಗಿ. ಲೆಕ್ಕಗಳು

12.4 ಏಕ ಚರದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು ಹಾಗೂ ದ್ವಿ-ಆಯಾಮದ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಲೆಕ್ಕಗಳು

13. ಅನುಕಲನ 10 ಗಂಟೆಗಳು

ಅನುಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯದ ಹೇಳಿಕೆ. ಅನುಕಲನವು ಅವಕಲನದ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿ. ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರಗಳು. ಅನುಕಲನದ ವಿಧಾನಗಳು :(i) ಆದೇಶದಿಂದ (ii) ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಂದ (iii) ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಾದರಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅನುಕಲಗಳು:

$$\frac{1}{a+b\cos x},\quad \frac{1}{a+b\sin x}\quad \frac{1}{a\cos x+b\sin x+c}$$

$$[f(x)]^n\ f'(x),\quad \frac{f'(x)}{f(x)}\quad \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\quad \frac{1}{x\sqrt{x^2\pm a^2}}\quad \frac{1}{a^2\pm x^2}\quad \frac{1}{x^2-a^2}$$

$$\sqrt{a^2+x^2},\quad \sqrt{a^2-x^2},\quad \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\quad \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\frac{p\cos x+q\sin x}{a\cos x+b\sin x},\quad e^x[f(x)+f'(x)]$$

14. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳು 6 ಗಂಟೆಗಳು

14.1 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಗುಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

15. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳ ಅನ್ವಯ 5 ಘಂಟೆಗಳು

15.1 ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಕೆಳಗಿನ (ಪ್ರದೇಶದ) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯವಿರುವ (ಪ್ರದೇಶದ) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ- ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು; ವೃತ್ತ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತ, ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ ಮುಂತಾದ ಮುಖ್ಯವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

16. ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು 4 ಘಂಟೆಗಳು

16.1 ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ಮಟ್ಟ ಮತ್ತು ದರ್ಜೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಮೊದಲನೇ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣದ ರಚನೆ. ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಚರಗಳ ವಿಂಗಡನೆಯಿಂದ ಮೊದಲನೇ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ದ್ವಿತೀಯ ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಯ ಗಣಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು

ದ್ವಿತೀಯ ಪಿ.ಯು.ಸಿ.ಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಮಟ್ಟ, *A,B,C,D* ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 10 ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಬೇಕು. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೇ, ಮುಖ್ಯ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ 1 ರಿಂದ 10 ರ ವರೆಗಿನ ವಿಷಯಗಳಿಂದ ಆಯ್ದ 1ಅಂಕದ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು, 2 ಅಂಕಗಳ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು 4 ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಇರಬೇಕು.

1. "ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ಸ್"ಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಗಣಿತ ತರ್ಕದ ಅನ್ವಯ

2. ಕೇಲಿ - ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿ (ಒಂದು ಕೋಶದ) ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

3. ಕೆಲಸ, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಬಲದ ಮಹತ್ವ, ಒಂದು ಯುಗ್ಮದ ಮಹತ್ವ ಹಾಗೂ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗೆ ಸದಿಶಗಳ ಅನ್ವಯ

4. ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ, ಮಿತಿಬಿಂದುಗಳು, ಲಂಬ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆ

5. ಶಂಕುಜಗಳ ಪ್ರಮಾಣಕ ಗುಣಗಳು

6. ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವಿಕ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯ ಭಾಗಗಳು

7. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ

8. ತ್ರಿ-ಆಯಾಮ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗರಿಷ್ಠತೆ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠತೆಯ ಲೆಕ್ಕಗಳು

9. ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರಚನೆ

10. ಚರಗಳ ವಿಂಗಡನೆಯ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಒಂದನೇ ದರ್ಜೆಯ ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ

11. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭಾಸ್ಕರರ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1150) ವಿಧಾನ, ಘನಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆರ್ಯಭಟನ ಕೊಡುಗೆ. "ಕಾಂಗ್ರುಯೆನ್ಸ್"ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಭಾಸ್ಕರ -I ಮತ್ತು ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ ಇವರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

12. ಪ್ರಪಂಚದ (ಖ್ಯಾತ) ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮತ್ತು ಅವರ ಕೃತಿಗಳು-ಪ್ರಬಂಧಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳ ಪರಿಹಾರ ಇತ್ಯಾದಿ

13. "ರಾಮಾನುಜನ್ ಮ್ಯಾಥೆಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಸೊಸೈಟಿ"ಯ ವಾರ್ತಾಪತ್ರ, "ಮ್ಯಾಥೆಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಸ್ಟೂಡೆಂಟ್", "ಮ್ಯಾಥೆಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಎಜುಕೇಶನ್"ಮುಂತಾದ ನಿಯತಕಾಲಿಕೆಗಳಿಂದ ಆಯ್ದ ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಮಕಾಲೀನ ಪ್ರಗತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪ್ರಬಂಧಗಳು

14. ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಅನುಮತಿಯಿಂದ ಯಾವುದೇ ಇತರ ಯೋಜನೆ.

ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಗುರಿ ಎಂದರೆ ಕನ್ನಡದ ಸರ್ವತೋಮುಖವಾದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ಭರಾಟೆಯಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಏದಕ್ಕೂ ಸಾಲದೆನ್ನುವುದನ್ನು ಬೇರೆ ಹೇಳಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಕಲಿತಮೇಲೆ ನಾವು ನಮ್ಮ ಇತಿಹಾಸದ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡೆವು. ಈ ಐತಿಹಾಸಿಕ ಪ್ರಜ್ಞೆಯಿಂದ ನಮ್ಮ ಹಳೆಯ ಜ್ಞಾನಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡೆವು. ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ನಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳೆಲ್ಲ ಗೊಡ್ಡು ಪುರಾಣಗಳಾದವು. ಆಯುರ್ವೇದದಂಥ ವಿಜ್ಞಾನ, ದೇವಸ್ಥಾನ ರಚನೆಯಂಥ ನಮ್ಮ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕೂಡ ಗೊಡ್ಡು ಪುರಾಣಗಳಾಗಿ ವಿಶ್ವಾಸ ಕಳೆದುಕೊಂಡವು. ನೆಲ, ಹೊಲ ಕನ್ನಡವಾಗಿದ್ದರೂ ಕೃಷಿಶಾಸ್ತ್ರ ಕೂಡ ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವ ವಿಪರ್ಯಾಸ ನಮ್ಮದಾಗಿದೆ.

ಈ ವಿಪರ್ಯಾಸವನ್ನು ತಡೆಗಟ್ಟುವುದು ಮತ್ತು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವುದು ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಗುರಿಯಾಗಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಹೇಳುವ ಸಲುವಾಗಿಯೇ ಇಂದು ಪ್ರಮಾಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಬಾಷೆಯೊಂದನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಬೆಳಕಿಗೆ ತರುವುದು ತೀರ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಈ ಅಗತ್ಯವನ್ನು ಪೂರೈಸಲು ನಾಡಿನ ವಿಷಯತಜ್ಞರೂ, ಭಾಷಾತಜ್ಞರೂ ಕೂಡಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಚಂದ್ರಶೇಖರ ಕಂಬಾರ

ಕುಲಪತಿಗಳು